

Типовой элемент для формирования рычажных связей в динамических взаимодействиях. Структурные подходы

С.В. Елисеев^{1 a}, И.С. Ситов^{2 b}, Д.Х. Нгуен^{1 c}

¹Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

²Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

^aeliseev_s@inbox.ru, ^bsitov@yandex.ru, ^chuynhnd1987@gmail.com

Статья поступила 16.01.2016, принята 18.02.2016

Рычажные связи в механических колебательных системах проявляются в различных формах, что не всегда ассоциируется с обычными представлениями о рычажных механизмах. Рычажными свойствами обладают также промежуточные твердые тела, входящие в состав колебательных систем, в том числе виброзащиты, для реализации специальных динамических режимов работы и управления динамическим состоянием технических объектов. Предлагаются метод и технология построения математических моделей возникновения и реализации рычажных связей в механических колебательных системах, формируемых промежуточными массоинерционными элементами в виде твердых тел, вводимых в состав виброзащитных систем дополнительно к объекту защиты от вибраций. Показано, что для формирования рычажных взаимодействий достаточно введения в структуру системы промежуточного твердого тела, которое может приобретать точку опоры. Разработана методическая основа оценки рычажных связей при различных конструктивных формах связей, создаваемых соединениями типовых элементов системы. Рассмотрены варианты проявления рычажных связей при различных размещениях точек опор рычага и необходимых для этого сочленений между звеньями системы. Показано, что безынерционные рычаги в механической колебательной системе образуют структуры, которые могут рассматриваться как квазипружины, обладающие приведенной динамической жесткостью. Рычажное звено играет существенную роль в формировании динамических свойств системы, образуя пространственную систему элементов и условия для преобразования движений элементов, создающих различные режимы динамических состояний.

Ключевые слова: рычажные связи; квазипружины; приведенная жесткость; сочленение; динамические режимы.

Standard element to form lever-type relations in dynamical interactions. Structural approaches

S.V. Eliseev^{1 a}, I.S. Sitov^{2 b}, D.Kh. Nguyen^{1 c}

¹Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

²Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

^aeliseev_s@inbox.ru, ^bsitov@yandex.ru, ^chuynhnd1987@gmail.com

Received 16.01.2016, accepted 18.02.2016

Lever-type relations in mechanical oscillatory systems appear in various forms, which is not always associated with conventional notions of leverage mechanism. Intermediate solid bodies, which are the parts of oscillatory systems, including vibration protection, in particular, possess leverage properties to implement special dynamic modes and control dynamic condition of technical objects. Method and technology are suggested to construct mathematical models of occurrence and realization of lever-type relations in mechanical oscillatory systems, formed by intermediate baricentric elements as solid bodies, implemented into the composition of the vibration isolation systems in addition to the object of protection against vibration. It is shown that to form leverage interactions, it is sufficient to implement an intermediate solid body into the system structure, which is able to acquire a foothold. Methodical basis has been developed to assess the lever-type relations under various structural forms of relations formed by the connections of standard elements of the system. Variants of exertion of lever-type relations has been studied under various placement of supporting points of the lever and joints between links of the system required for this. It is shown that instantaneous levers in mechanical oscillatory system creature structures, which may be considered as quasi-springs with reduced dynamic stiffness. Leverage link plays a significant part in forming the dynamic properties of the system, creating a spatial system of elements and conditions for transforming the movements of the elements, which in their turn create various modes of dynamical states.

Key words: lever-type relations; quasi-springs; reduced stiffness; joint; dynamic modes.

Введение

Вопросы взаимодействия элементов динамических колебательных систем и виброзащиты достаточно подробно рассматривались, в частности, в работах по тео-

рии механических цепей [1–6]. Существенное расширение представлений о возможностях, привносимых рычажными связями, реализуемыми во взаимодействии элементов систем, связано с развитием робототех-

ники, мехатроники и ростом требований к обеспечению надежности работы и безопасности эксплуатации машин в условиях интенсивного вибрационного нагружения [7–9].

Многие вопросы, относящиеся к задачам динамики колебательных систем, имеющих в своем составе рычажные механизмы и устройства для преобразования движения, нашли отражение в публикациях последних лет [10–13]. Вместе с тем в решении задач динамики систем с рычажными устройствами и динамическими взаимодействиями, возникающими при соединении элементов систем в определенные структуры (блоки), существуют определенные трудности, связанные с недостаточным развитием детализированных представлений о формировании рычажных взаимодействий и формах их проявления, возникающих в соединениях типовых элементов механических колебательных систем.

В предлагаемой статье рассматриваются вопросы формирования математических моделей механических колебательных систем с рычажными связями, формируемыми промежуточными массоинерционными элементами в виде твердых тел, вводимых в состав виброзащитных систем дополнительно к объекту защиты от вибраций.

I. Общие положения. Постановка задачи исследования. Рассматривается расчетная схема виброзащитной системы (рис. 1), состоящей из объекта защиты массой m с опорными поверхностями I, II, III, каждая из которых может быть источником соответствующего кинематического гармонического возмущения (z_1, z_2, z_3). Предполагается, что объект защиты (m) может иметь силовое возмущение Q . Объект защиты совершает малые вертикальные колебания относительно положения устойчивого равновесия. Система координат связана с неподвижным базисом. Механическая колебательная система имеет две степени свободы, поскольку кроме объекта защиты (m) в рассмотрение вводится промежуточное твердое тело, имеющее неподвижную точку опоры (т. O), которая связана с опорной поверхностью II. Положение твердого тела, представленного невесомым жестким стержнем (A_1, A_2), определяется угловой координатой φ . На концах стержней (длины l_1 и l_2) соответственно находятся материальные точки A_1, A_2 массами m_1 и m_2 . Таким образом, промежуточное твердое тело обладает моментом инерции:

$$J = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2. \quad (1)$$

Предполагается, что масса твердого тела $M = m_1 + m_2$, а центр тяжести совпадает с точкой вращения рычага (т. O). Размещение твердого тела на расчетной схеме (рис. 1) и особенности его связей с опорной поверхностью II и другими элементами системы в данном случае определяют возможности рассмотрения промежуточного твердого тела как инерционного рычага второго рода [14]. В тт. A_1, A_2 рычаг соединяется с упругими элементами системы (линейные пружины с жесткостями k_1, k_2 и k_3).

Система совершает малые колебания относительно положения статического равновесия в системе координат и связана с неподвижным базисом.

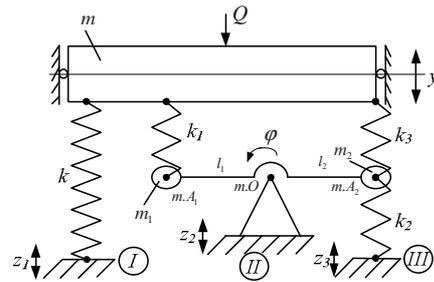


Рис. 1. Расчетная схема виброзащитной системы с промежуточным твердым телом (инерционным рычагом второго рода)

II. Построение математической модели. Рассматривается случай силового возмущения, то есть $Q \neq 0$ при $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0$. Для построения математической модели используются подходы, основанные на уравнении Лагранжа 2-го рода с последующими преобразованиями линейных дифференциальных уравнений по Лапласу [15; 16].

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\varphi}^2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} k_1 (y - l_1 \varphi)^2 + \frac{1}{2} k_2 (l_2 \varphi)^2 + \\ & + \frac{1}{2} k_3 (y + l_2 \varphi)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

После ряда преобразований уравнения движения примут вид:

$$\bar{y} (m p^2 + k + k_1 + k_3) - \bar{\varphi} (k_1 l_1 - k_3 l_2) = \bar{Q}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} [& (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2] + \\ & - \bar{y} (k_1 l_1 - k_3 l_2) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Структурная схема исходной системы приведена на рис. 2.

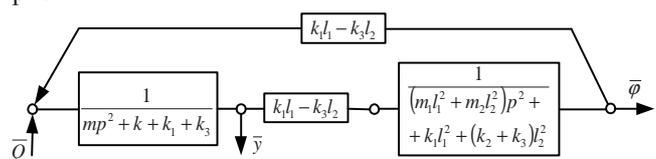


Рис. 2. Структурная схема виброзащитной системы с двумя степенями свободы при силовом возмущении

Цель исследования заключается в изучении условий формирования рычажных связей, привносимых в виброзащитную систему промежуточным твердым телом. При этом предлагается учет особенностей и форм внешних воздействий, которые могут иметь вид силовых или кинематических возмущений. При оценке связей большое значение имеет выбор величин параметров упругих и массоинерционных характеристик с возможностями достижения ими предельных значений. Совмещение подходов, связанных с эквивалентными структурными преобразованиями структурных схем и передаточных функций, в которых параметры систем могут принимать предельные значения, определяют

ют технологию и метод построения математических моделей виброзащитных систем с рычажными связями.

Структурная схема (рис. 2) состоит из двух парциальных систем, для которых парциальные частоты соответственно определяются для объекта защиты и промежуточного твердого тела (или инерционного рычага):

$$n_1^2 = \frac{k + k_1 + k_3}{m}, \quad (6)$$

$$n_2^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2}{J}. \quad (7)$$

Межпарциальные связи в системе (рис. 2) относятся к числу упругих и реализуются типовым упругим звеном с приведенной жесткостью:

$$k' = k_1 l_1 - k_3 l_2. \quad (8)$$

Входное силовое возмущение \bar{Q} в данном случае действует по одному входу.

Структурная схема на рис. 2 может быть преобразована таким образом, чтобы исключить координату $\bar{\varphi}$ (рис. 3 а, б). Отметим, что в уравнениях движения (4), (5) и структурных схемах на рис. 2, а также в последующих выражениях и рисунках приняты следующие обозначения: $p = j\omega$ — комплексная переменная; значок (-) над переменными обозначает изображение по Лапласу.

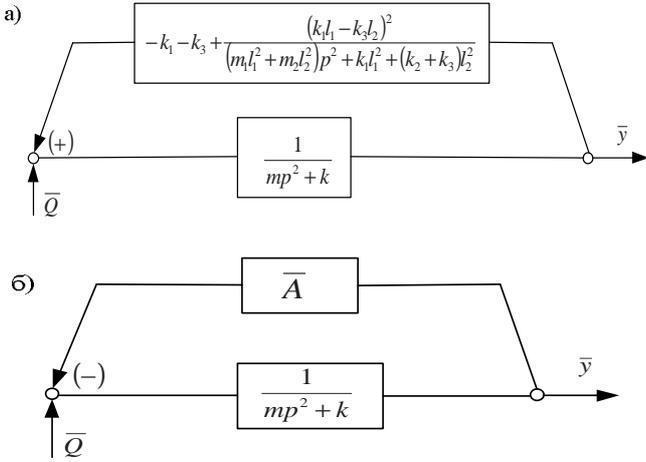


Рис. 3. Преобразованная структурная схема с исключением координаты $\bar{\varphi}$: а — детализованная схема; б — обобщенный вид (на рис. 3б обозначена через \bar{A} передаточная функция цепи обратной связи)

На рис. 3а приведена структурная схема, на которой исходная структура (рис. 2) преобразована выделением базовой модели виброзащитной системы по рис. 1. Базовая модель состоит из двух элементов: объекта защиты массой m и упругого элемента с жесткостью k , опирающегося на опорную поверхность I. На рис. 3а базовая модель интерпретируется звеном с передаточной функцией:

$$W_{об}(p) = \frac{1}{mp^2 + k}. \quad (9)$$

Пружина жесткостью k соответствует представлениям о том, что по отношению к объекту защиты как таковому, имеющему передаточную функцию интегрирующего звена второго порядка, вводится отрицательная обратная связь с коэффициентом усиления, равным k . На преобразованной структурной схеме (рис. 3а) показана возможность выделения по отношению к базовой модели с передаточной функцией (9) отдельной цепи обратной связи. На рис. 3б эта обратная связь обозначена с привлечением передаточной функции $\bar{A}(p)$.

$$\bar{A}(p) = \frac{(k_1 + k_3)(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)p^2 + k_1 k_3 (l_1 + l_2)^2 + k_2 l_2^2 (k_1 + k_3)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2} \quad (10)$$

Выражение (10), в физическом смысле, определяет свойства квазиупругого элемента, или так называемой квазипружины [17]. Из (10) может быть найдена приведенная динамическая жесткость квазипружины. Отметим, что динамическая жесткость $\bar{A}(p) = k_{пр}(p)$ зависит от частоты внешнего воздействия.

III. Свойства квазипружины. Введение промежуточного твердого тела приводит в данной задаче виброзащитной системы к отношению к объекту защиты по отношению к объекту защиты к возможности рассмотрения вполне определенной структуры (или структурного образования) в виде инерционного рычага. Ситуация может быть представлять и так, что квазипружина своими свойствами определяет функциональные возможности массоинерционного рычага 2-го рода с опорной точкой O (рис. 1).

Рассмотрим ряд частных случаев.

1. Если $k_3 = 0$, то:

$$k_{пр1}(p) = \bar{A}(p) = \frac{k_1(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)p^2 + k_2 l_2^2 k_1}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}, \quad (11)$$

$$k_{пр1}(p) = \bar{A}(p) = \frac{k_1[(m_1 + m_2 i^2)p^2 + k_2 i^2]}{(m_1 + m_2 i^2)p^2 + k_1 + k_2 i^2}, \quad (12)$$

где $i = \frac{l_2}{l_1}$ — передаточное отношение рычага 2-го рода.

Если $k_2 = 0, k_3 = 0$, то:

$$k_{пр2}(p) = \bar{A}(p) = \frac{k_1(m_1 + m_2 i^2)p^2}{(m_1 + m_2 i^2)p^2 + k_1}. \quad (13)$$

Если $k_1 \rightarrow \infty$, то из (11) следует, что при $k_2 = 0, k_3 = 0$:

$$k_{пр3}(p) = \bar{A}(p) = (m_1 + m_2 i^2)p^2. \quad (14)$$

Полученное выражение (14) соответствует, в физическом смысле, присоединению к объекту защиты дополнительных масс $(m_1 + m_2 i^2)$. В этом случае структурная схема исходной системы принимает вид, как показано на рис. 4.

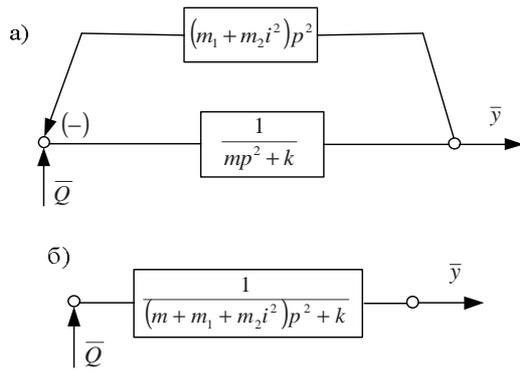


Рис. 4. Структурная схема системы с промежуточным телом при $k_1 \rightarrow \infty$ (динамический рычажный гаситель колебаний): а — дополнительная обратная связь инерционного типа; б — обобщенная схема

Если $m_1 \rightarrow \infty$ и $m_2 \rightarrow \infty$, т. е. промежуточное твердое тело или массоинерционный рычаг обладают исчезающей малой инерционностью, то его влияние при отсутствии упругих связей ($k_2 = 0, k_3 = 0$) не проявляется.

Если полагать, что рычаг обладает ощутимыми массоинерционными свойствами и конструктивно связан с упругими элементами, то в плане учета динамических свойств система будет обладать при $k_1 \neq 0$ двумя степенями свободы, а особенности передаточной функции рычага будут зависеть от величин жесткости пружин

k_1, k_2 и k_3 . В этом случае инерционный рычаг выступает как сложный дополнительный элемент, существенно влияющий на свойства системы при силовом возмущении объекта защиты.

Передаточная функция системы при силовом возмущении Q имеет вид:

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{Q} = \frac{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) p^2 + k_1 l_1^2 + (k_2 + k_3) l_2^2}{(m p^2 + k) \left[(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) p^2 + (k_1 + k_3) l_1^2 + k_1 l_1^2 + (k_2 + k_3) l_2^2 \right] - (k_1 l_1 - k_3 l_2)^2} \quad (15)$$

В системе возможен режим динамического гашения на частоте:

$$\omega_{\text{дин}}^2 = \frac{k_1 l_1^2 + (k_2 + k_3) l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = \frac{k_1 + (k_2 + k_3) i^2}{m_1 + m_2 i^2} \quad (16)$$

где $i = \frac{l_2}{l_1}$ — передаточное отношение рычажной связи.

Если $k_1 \rightarrow \infty$, то система теряет одну степень свободы:

$$W'(p) = \frac{\bar{y}}{Q} = \frac{1}{(m + m_1 + m_2 i^2) p^2 + (k_2 + k_3) i^2 + k} \quad (17)$$

В табл. 1 приведены для сравнения разновидности структурных схем системы и особенности их передаточных функций.

Таблица 1

Разновидности структурных схем системы и особенности их передаточных функций

Параметры	Схема	Передаточная функция
$k_1 \rightarrow \infty$		$W'(p) = \frac{\bar{y}}{Q} = \frac{1}{(m + m_1 + m_2 i^2) p^2 + (k_2 + k_3) i^2 + k}$
$k_1 \rightarrow \infty$ и $k_3 = 0$		$W'(p) = \frac{\bar{y}}{Q} = \frac{1}{(m + m_1 + m_2 i^2) p^2 + k_2 i^2 + k}$
$k_1 \rightarrow \infty, k_3 = 0$ и $k_2 = 0$		$W'(p) = \frac{\bar{y}}{Q} = \frac{1}{(m + m_1 + m_2 i^2) p^2 + k}$

При использовании квазипружин необходимо учитывать зависимость приведенной динамической жесткости от частоты.

1. Если $k_{пр} = \infty$, то знаменатель передаточной функции будет равен нулю, а динамическая приведенная жесткость будет бесконечно большой. Как известно, такая ситуация характерна для режима динамического гашения колебаний. В этом случае при действии на объект защиты внешней гармонической силы объект m останется неподвижным, а массоинерционный рычаг (или инерционный рычаг) будет колебаться с амплитудой, величина которой может быть определена из передаточной функции (15).

2. Если $k_{пр} = 0$, то значение динамической приведенной жесткости стремится к нулю. В этом случае числитель передаточной функции квазипружины становится равным нулю.

Для оценки свойств системы при динамической жесткости, равной нулю, необходимо привести структурную схему на рис. 3 к виду, как показано на рис. 5, что предопределяет выделение объекта защиты как интегрирующего звена 2-го порядка.

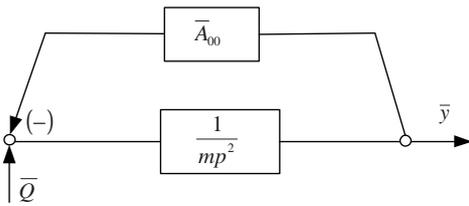


Рис. 5. Структурная схема, преобразованная для определения динамической жесткости

В данном случае получим, что:

$$\bar{A}(p) = \frac{(k + k_1 + k_3)(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) p^2 + k_1 [k_2 l_2^2 + k l_1^2 + k_3 (l_1 + l_2)^2] + k_2 k_3 l_2^2 + k l_2^2 (k_2 + k_3)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2}. \quad (18)$$

Выражение (18) отличается от (10) тем, что в числителе (18) учитывается жесткость k , соединяющего объект защиты с опорной поверхностью I (рис. 1). Нулевое значение динамической жесткости соответствует частоте:

$$\omega_{00}^2 = \frac{k_1 [k_2 i^2 + k + k_3 (i+1)^2] + k_2 k_3 i^2 + k i^2 (k_2 + k_3)}{(m_1 + m_2 i^2) (k + k_1 + k_3)}. \quad (19)$$

При частоте из (19) отношение амплитуд колебаний по координатам \bar{y}_1 и \bar{y} определится:

$$W_{00}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}} = \frac{k + k_1 + k_3}{k_1 - i k_3}. \quad (20)$$

При выполнении условия:

$$k_1 > i k_3 \quad (21)$$

знаменатель выражения (20) будет положительным. При этом отношение амплитуд колебаний \bar{y}_1/\bar{y} будет положительным, что соответствует представлением о совместном движении масс в свободных колебаниях по первой форме. Соотношение параметров упругих элементов имеет существенное значение и требует отдельного рассмотрения, предполагающего возможность проявления специфических динамических режимов.

Таким образом, при силовом возмущении инерционный рычаг, входящий в состав квазипружины, не только формирует сложный упругий элемент с динамической жесткостью, зависящей от частоты внешнего воздействия, но и обеспечивает возможности появления двух динамических режимов: режим динамического гашения колебаний и режима движения с нулевой динамической жесткостью. Последний режим представляет собой движения элементов системы в форме, соответствующей форме колебаний при свободных движениях исходной системы.

IV. Построение математической модели при кинематическом возмущении, учитывающей движения трех опорных поверхностей (рис. 1). В этом случае определение потенциальной энергии требует учета особенностей переносных и относительных движений.

$$\Pi = \frac{1}{2} k (y - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_1 (y - l_1 \varphi - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 (l_2 \varphi - z_2 + z_3)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y + l_2 \varphi - z_2)^2. \quad (22)$$

Если $z_1 = 0$, $z_3 = 0$, то выражения для потенциальной и кинетической энергий примут вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} k_1 (y - l_1 \varphi - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 (l_2 \varphi - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y + l_2 \varphi - z_2)^2. \quad (23)$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\varphi}^2, \quad (24)$$

Для оценки кинетической энергии промежуточного твердого тела выражение $T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\varphi}^2$ можно рассмотреть более детально, учитывая особенности системы. Введем координаты движения:

$$y_1 = l_1 \varphi \text{ и } y_2 = -l_2 \varphi, \quad (25)$$

учитывая, что рассматривается рычаг второго рода. Тогда y_1, y_2 отражают относительное движение точек m_1 и m_2 . Относительное движение в данном случае — это вращение вокруг точки O .

Развивая более общий подход, при $z_2 \neq 0$ по известным законам движения опорной поверхности и углам поворота φ получим выражения для скоростей точек A_1 и A_2 в абсолютном движении:

$$v_{A_1} = -l_1 \dot{\varphi} + \dot{z}_2, \quad v_{A_2} = l_2 \dot{\varphi} + \dot{z}_2. \quad (26)$$

Тогда:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 (-l_1 \dot{\varphi} + \dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\varphi} + \dot{z}_2)^2, \quad (27)$$

откуда следует, что:

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m_1(-l_1\dot{\varphi} + \dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2\dot{\varphi} + \dot{z}_2)^2 = \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(m_2l_2 - m_1l_1)\dot{z}_2 + \frac{1}{2}\dot{z}_2^2(m_1 + m_2). \quad (28)$$

Так как центр тяжести промежуточного твердого тела совпадает с центром его вращения, $m_2l_2 - m_1l_1 = 0$. В этом случае для составления дифференциальных уравнений при кинематическом возмущении основа выражения для кинетической энергии не изменится по сравнению со случаем силового возмущения:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\dot{\varphi}^2.$$

Выражение для потенциальной энергии с учетом кинематических возмущений имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_1(y - l_1\varphi - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(l_2\varphi - z_2 - z_3)^2 + \frac{1}{2}k_3(y + l_2\varphi - z_2)^2. \quad (29)$$

При формировании выражения (29) учтены особенности движения промежуточного твердого тела (или инерционного рычага 2-го рода).

Уравнения движения получены на основе использования уравнения Лагранжа 2-го рода. Коэффициенты уравнений движения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты уравнения движения системы в координатах y, φ

a_{11}	a_{12}
$mp^2 + k + k_1 + k_3$	$-k_1l_1 + k_3l_2$
a_{21}	a_{22}
$-k_1l_1 + k_3l_2$	$Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2$
Q_1	Q_2
$kz_1 + k_1z_2 + k_3z_2$	$-k_1l_1z_2 + k_3l_2z_2 + k_2l_2z_3 + k_2l_2z_2$

1. Рассмотрим случай опоры на общую опорную поверхность, что определяет входное возмущение при одинаковых движениях опорной поверхности I и II:

$$\bar{Q}_y = \bar{z}(k + k_1 + k_3), \quad \bar{Q}_\varphi = \bar{z}(-k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_2).$$

При этом предполагается, что $z_1 = z_2 = z, z_3 = 0$. Найдем передаточную функцию системы с учетом воздействий по входным \bar{Q}_y и \bar{Q}_φ :

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{(k+k_1+k_3)(Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2) + (-k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_2)(k_1l_1 - k_3l_2)}{A_0}, \quad (30)$$

где:

$$A_0 = \left(mp^2 + k + k_1 + k_3 \right) \left(Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2 \right) - (k_1l_1 - k_3l_2)^2. \quad (31)$$

Сгруппируем числитель и знаменатель (30) с выделением k_1 , опуская другие члены выражений, полагая, что $k_1 \rightarrow \infty$:

$$W_2'(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{+k(k_2l_2^2 + k_3l_2^2) - k_2k_3l_2^2}{k_1(Jp^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2) + k_1l_1^2(mp^2 + k + k_3) + 2k_1k_3l_1l_2 + k_3(Jp^2 + k_2l_2^2) + (mp^2 + k)(Jp^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2) + Jp^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2 + l_1^2(k + k_3) + k_2l_1l_2 + 2k_3l_1l_2} = \frac{+k(k_2l_2^2 + k_3l_2^2) - k_2k_3l_2^2}{k_1(Jp^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2) + l_1^2(mp^2 + k + k_3) + 2k_3l_1l_2 + Jp^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2 + l_1^2(k + k_3) + k_2l_1l_2 + 2k_3l_1l_2} = \frac{+k_2l_1l_2 + 2k_3l_1l_2}{(ml_1^2 + J)p^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2 + l_1^2(k + k_3) + 2k_3l_1l_2}. \quad (32)$$

Разделим числитель и знаменатель (32) на l_1^2 :

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{(m_1 + m_2i^2)p^2 + (k_2 + k_3)i^2 + k + k_3 + i(k_2 + 2k_3)}{(m + m_1 + m_2i^2)p^2 + (k_2 + k_3)i^2 + k + k_3 + 2k_3i}. \quad (33)$$

Примем условие $k_3 = 0$, тогда одно из внешних кинематических воздействий, а именно z_3 , не будет оказывать влияние.

2. Если $k_3 = 0$, то:

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{(m_1 + m_2i^2)p^2 + k_2i^2 + k + ik_2}{(m + m_1 + m_2i^2)p^2 + k_2i^2 + k}. \quad (34)$$

3. Если $k_2 = 0$, то:

$$W_3'(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{(m_1 + m_2i^2)p^2 + k}{(m + m_1 + m_2i^2)p^2 + k}. \quad (35)$$

В табл. 3 приведены сравнительные данные для различного сочетания параметров.

Таблица 3

Варианты передаточных функций при различных значениях жесткостей упругих элементов

Параметры	Передаточная функция
$k_1 \rightarrow \infty$	$W_2(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{Jp^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2 + l_1^2(k + k_3) + k_2l_1l_2 + 2k_3l_1l_2}{(ml_1^2 + J)p^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2 + l_1^2(k + k_3) + 2k_3l_1l_2}$
$k_1 \rightarrow \infty$ и $k_3 = 0$	$W_3(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{(m_1 + m_2i^2)p^2 + k_2i^2 + k + ik_2}{(m + m_1 + m_2i^2)p^2 + k_2i^2 + k}$
$k_1 \rightarrow \infty, k_3 = 0$ и $k_2 = 0$	$W_3'(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{(m_1 + m_2i^2)p^2 + k}{(m + m_1 + m_2i^2)p^2 + k}$

V. Упругое закрепление промежуточного твердого тела в точке опоры. Рассмотрим расчетную схему системы (рис. 5) где промежуточное твердое тело имеет в точке O упругий элемент с жесткостью k_0 .

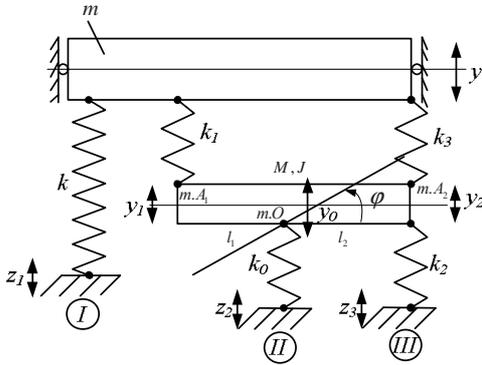


Рис. 6. Расчетная схема виброзащитной системы с промежуточным твердым телом на упругой опоре

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} k (y - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_1 (y - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z_3)^2 + \\ & + \frac{1}{2} k_3 (y - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_0 (y_0 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Введем ряд соотношений между координатами системы:

$$\begin{cases} y_0 = a y_1 + b y_2, \varphi = c \cdot (y_2 - y_1), \\ y_1 = y_0 - l_1 \varphi, y_2 = y_0 + l_2 \varphi, \\ a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2}. \end{cases} \quad (38)$$

Используя аналогичные вышеприведенным приемы, можно получить систему уравнений движения в координатах y, φ и y_0 . Коэффициенты уравнений приведены в табл. 4.

Таблица 4

Коэффициенты уравнений движения системы в координатах y, φ и y_0

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$mp^2 + k + k_1 + k_3$	$k_1 l_1 - k_3 l_2$	$-k_1 - k_3$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$k_1 l_1 - k_3 l_2$	$Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2$	$-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_2$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$-k_1 - k_3$	$-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_2$	$Mp^2 + k_0 + k_1 + k_2 + k_3$
Q_y	Q_φ	Q_{y_0}
kz_1	$k_2 l_2 z_3$	$k_2 z_3 + k_0 z_2$

Примечание. $M = m_1 + m_2$ — сумма масс материальных точек на расчетной схеме (рис. 1).

Воспользуемся формулой Крамера [2] для определения движения по координате y :

$$y = \frac{Q_y (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + Q_\varphi (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}) + Q_{y_0} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22})}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2 + 2a_{12} a_{23} a_{31}}. \quad (39)$$

Перепишем (39), принимая, что $z_1 = z_2 = z, z_3 = 0$:

$$W_4(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{k(a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + k_0(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22})}{A'_0}, \quad (40)$$

где A'_0 :

$$A'_0 = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2 + 2a_{12} a_{23} a_{31}. \quad (41)$$

Рассмотрим блок $(a_{22} a_{33} - a_{23}^2)$ в развернутом виде:

$$\left(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2 \right) \cdot \left(Mp^2 + k_0 + k_1 + k_2 + k_3 \right) - (-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_2)^2.$$

Учтем, что (40) можно преобразовать к форме:

$$W_4'(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{k + \frac{k_0(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22})}{a_{22} a_{33} - a_{23}^2}}{a_{11} - \frac{a_{22} a_{13}^2}{a_{22} a_{33} - a_{23}^2} - \frac{a_{33} a_{12}^2}{a_{22} a_{33} - a_{23}^2} + \frac{2a_{12} a_{23} a_{31}}{a_{22} a_{33} - a_{23}^2}}. \quad (42)$$

Рассмотрим каждый из фрагментов (42), примем:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{Q_\varphi (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33})}{a_{22} a_{33} - a_{23}^2}, \\ B_2 &= \frac{k_0 (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22})}{a_{22} a_{33} - a_{23}^2} = \\ &= \frac{k_0 \left[(k_1 l_1 - k_3 l_2)(-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_2) + (k_1 + k_3)(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2) \right]}{\left(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2 \right) \left(Mp^2 + k_0 + k_1 + k_2 + k_3 \right) - (-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_2)^2}, \\ B_3 &= -\frac{a_{22} a_{13}^2}{a_{22} a_{33} - a_{23}^2} = \\ &= \frac{-\left(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2 \right) (k_1 + k_3)^2}{\left(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2 \right) \left(Mp^2 + k_0 + k_1 + k_2 + k_3 \right) - (-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_2)^2}, \\ B_4 &= -\frac{a_{33} a_{12}^2}{a_{22} a_{33} - a_{23}^2} = \\ &= \frac{-\left(Mp^2 + k_0 + k_1 + k_2 + k_3 \right) (k_1 l_1 - k_3 l_2)^2}{\left(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_2^2 \right) \left(Mp^2 + k_0 + k_1 + k_2 + k_3 \right) - (-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_2)^2}, \end{aligned}$$

$$B_5 = \frac{2a_{12}a_{23}a_{31}}{a_{22}a_{33} - a_{23}^2} = \frac{-2(k_1l_1 - k_3l_2)(-k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_2)(k_1 + k_3)}{\left(Jp^2 + k_1l_1^2 + \left(Mp^2 + k_0 + \left(+k_1 + k_2 + k_3 \right) - \left(-k_1l_1 + k_2l_2 + \left(+k_3l_2 \right) \right)^2 \right) \right)}$$

Выделяя части при $k_0 \rightarrow \infty$, получим:

$$B_1 = 0,$$

$$B_2 = \frac{(k_1l_1 - k_3l_2)(-k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_2) + (k_1 + k_3)(Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2)}{Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2},$$

$$B_3 = 0,$$

$$B_4 = -\frac{(k_1l_1 - k_3l_2)^2}{Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2},$$

$$B_5 = 0.$$

Запишем (42) в форме:

$$W_4^*(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{k + \frac{(k_1l_1 - k_3l_2)(-k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_2) + (k_1 + k_3)(Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2)}{Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2}}{mp^2 + k + k_1 + k_3 + \frac{(k_1l_1 - k_3l_2)^2}{Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2}} = \frac{(k + k_1 + k_3)(Jp^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3l_2^2) + (k_1l_1 - k_3l_2)(-k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_2)}{\left(mp^2 + k + \left(Jp^2 + k_1l_1^2 + \left(+k_1 + k_2 + k_3 \right) - \left(-k_1l_1 + k_2l_2 + \left(+k_3l_2 \right) \right)^2 \right) \right)} \quad (43)$$

Формула (43) совпадает с (30), что дает возможность убедиться в обоснованности метода построения математических моделей механических колебательных систем с твердыми телами, которые образуют между собой сочленения. Такие подвижные соединения можно формально получать, учитывая, что упругий связующий элемент приобретает высокую жесткость (в данном случае жесткость k_2 или k_1 устремляется к бесконечности). При этом в конечном итоге система теряет соответствующее число степеней свободы.

Последовательность построения математических моделей начинается с формирования обобщенной расчетной схемы, не содержащей сочленений звеньев, с последующим применением известных приемов составления уравнений движения в выбранных координатах (например, на основе формализма Лагранжа). Затем процедуры упрощения математических моделей унифицируются до достаточно простых операций, что позволяет использовать предлагающую технологию построения математических моделей как метод.

Заключение

Рычажные связи в механических колебательных системах проявляются в различных формах, что не всегда ассоциируется с обычными представлениями о рычажных механизмах. Рычажными свойствами обладают также промежуточные твердые тела, входящие в состав колебательных систем, в том числе виброзащиты, для реализации специальных динамических режимов работы и управления динамическим состоянием технических объектов.

В работе показано, что рычажные связи при динамических взаимодействиях элементов систем могут быть рассмотрены с использованием математических моделей. Такие модели могут быть получены на основе определенных приемов, включающих предварительное получение уравнений обычным методом (применяется уравнение Лагранжа 2-го рода), с последующим использованием структурных моделей и интерпретацией результатов путем перехода к введению в передаточные функции и выражения для приведенных динамических жесткостей предельно больших значений параметров (в данном случае коэффициентов жесткости упругих элементов).

1. Определение рычажных связей в плане оценки их вида и динамических свойств можно осуществлять путем введения промежуточных твердых тел, для которых применяются сочленения звеньев в точках твердого тела, где предполагается размещение точки опоры рычага.

2. Показано, что промежуточное твердое тело, по существу, можно рассматривать как инерционный рычаг. При «обнулении» массоинерционных свойств рычага происходит уменьшение числа степеней свободы системы. В частности, обязательное уменьшение числа степеней на единицу происходит при «закреплении» точки опоры.

3. В общем случае рычаг, по сравнению с такими типовыми упругими и диссипативными элементами, является более сложным звеном. Передаточная функция такого звена в структурных подходах представлена дробно-рациональным выражением второго порядка.

4. Рычажное звено играет существенную роль в формировании динамических свойств системы, образуя пространственную систему элементов и условия для преобразования движений элементов, создающих различные режимы динамических состояний.

5. Предлагаются метод и технология построения математических моделей, позволяющие реализовать подходы, связанные, в частности, с поиском и оценкой рациональных конструктивно-технических решений при разработке способов и средств вибрационной защиты.

Литература

1. Ленк А. Электромеханические системы. Системы с сосредоточенными параметрами. М.: Мир, 1978. 283 с.
2. Дружинский И.А. Механические цепи. М.: Машиностроение, 1977. 240 с.
3. Вибрации в технике: справочник в 6 т. Т.6 Защита оборудования от вибраций / под ред. К.В. Фролова. М.: Машиностроение, 1981. 452 с.

4. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Упырь Р.Ю., Гозбенко В.Е. Рычажные связи в задачах динамики механических колебательных систем. Теоретические аспекты. Деп. ВИНТИ. 27.11.2009. № 737 В 2009

5. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 363 с.

6. Каимов Е.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Некоторые приложения теории рычажных связей. Иркутск: ИрГУПС, 2015. 43 с. Деп. Рукоп. в ВИНТИ РАН 05.10.15, № 160 В 2015

7. Пановко Я.Г. Динамика вибрационных технологических процессов. М.: Изhevск: РХД, 2006. 158 с.

8. Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неударяющих связей. Новосибирск: Наука, 2015. 332 с.

9. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. рычажные и инерционно-упругие связи. СПб.: Наука, 2013. 319 с.

10. Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Каимов Е.В., Кинаш Н.Ж. Прикладные задачи теории динамического гашения колебаний. Иркутск: ИрГУПС, 2015. 105 с. Деп. рукоп. в ВИНТИ 27.02.2015. № 39 В 2015.

11. Елисеев С.В., Большаков Р.С., Кинаш Н.Ж. Рычажные связи: виртуальные рычажные механизмы, особенности колебательных процессов // Юго-Зап. гос. ун-т. Курск. 2015, № 1 (58). Ч. 1. С. 8-17.

12. Елисеев С.В., Кинаш Н.Ж., Каимов Е.В. Рычажные связи механических колебательных систем // Вестн. Всерос. научно-исслед. и проектно-конструкт. ин-та электровозостроения. Новочеркасск, 2015. № 1 (69). С. 112-126.

13. Елисеев С.В., Лондих П.А., Каимов Е.В. О выборе формы структурного представления рычажных связей в механических колебательных системах // Вестн. иркут. нац. исслед. техн. ун-та. Иркутск, 2014. Ч. 1, № 11. С. 38-45.

14. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1987. 560 с.

15. Елисеев С.В., Волков Л.Н., Кухаренко В.П. Динамика механических колебательных систем с дополнительными связями. Новосибирск: Наука, 1988. 206 с.

16. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.

17. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Квазиэлементы в механических колебательных системах. особенности систем при исключении переменных динамического состояния // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск: ИрГУПС, 2013. Вып. 2 (38). С.8-17.

References

1. Lenk A. Electromechanical systems. Systems with the concentrated parameters. M.: Mir, 1978. 283 p.

2. Druzhinskii I.A. Mechanical chains. M.: Mashinostroenie, 1977. 240 p.

3. Vibrations in equipment: the reference book in 6 volumes. V.6. "Protection of the equipment against vibrations" / pod red. K.V. Frolova. M.: Mashinostroenie, 1981. 452 p.

4. Eliseev S.V., Belokobyl'skii S.V., Upyr' R.Yu., Gozbenko V.E. Lever ties in problems of dynamics of mechanical oscillatory systems. Theoretical aspects. Dep. VINITI. 27.11.2009. № 737 В 2009.

5. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied tasks of the structural theory of vibroprotective systems. SPb.: Politekhnik, 2013. 363 p.

6. Kaimov E.V., Kuznetsov N.K., Eliseev S.V. Some appendices of the theory of lever communications. Irkutsk: IrGUPS, 2015. 43 p. Dep. Rukop. v VINITI RAN 05.10.15, № 160 В 2015.

7. Panovko Ya.G. Dynamics of vibration technological processes. M.: Izhevsk: RKhD, 2006. 158 p.

8. Eliseev A.V., Sel'vinskii V.V., Eliseev S.V. Dynamics of vibration interactions of elements of technological systems taking into account not holding ties. Novosibirsk: Nauka, 2015. 332 p.

9. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Sotov I.S. Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial and elastic ties. SPb.: Nauka, 2013. 319 p.

10. Eliseev S.V., Trofimov A.N., Kaimov E.V., Kinash N.Zh. Applied tasks of the theory of dynamic absorption of oscillations. Irkutsk: IrGUPS, 2015. 105 p. Dep. rukop. v VINITI 27.02.2015. № 39 В 2015.

11. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Kinash N.Zh. Lever ties: virtual lever mechanisms, features of oscillatory processes // Southwest State University. 2015, № 1 (58). Ch.1. P. 8-17.

12. Eliseev S.V., Kinash N.Zh., Kaimov E.V. Lever ties of mechanical oscillatory systems // Vestnik "VELNII", 2015. № 1 (69). P. 112-126.

13. Eliseev S.V., Lontsikh P.A., Kaimov E.V. On the choice of the structural representation form of lever-type linkages in mechanical oscillatory systems (Pt.1) // Vestnik of Irkutsk State Technical University. Irkutsk, 2014. № 11. P. 38-45.

14. Krainev A.F. The dictionary reference on mechanisms. 2-е изд., pererab. i dop. M.: Mashinostroenie, 1987. 560 p.

15. Eliseev S.V., Volkov L.N., Kukharenko V.P. Dynamics of mechanical oscillatory systems with additional ties. Novosibirsk: Nauka, 1988. 206 p.

16. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronics approaches in dynamics of mechanical oscillatory systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.

17. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Quasi-elements in mechanical oscillatory systems. Features of systems at an exception of variables of a dynamic state // Modern technologies. System analysis. Modeling. Irkutsk: IrGUPS, 2013. Vyp. 2 (38). P.8-17.