

References

1. Pikina G.A., Kuznetsov M.S. Application of linear predictive algorithms of regulation // New in Russian Electrical Power-Engineering. 2009. № 10. P. 40-44.
2. Pikina G.A., Kuznetsov M.S. Predictive standard algorithms of regulation // Thermal Engineering. 2011. № 4. P. 61-66.
3. Pikina G.A. Principle of management according to the forecast and a possibility of control of systems of regulation by one parameter // New in Russian Electrical Power-Engineering. 2014. № 3. P. 5-13.
4. Kryukov A.V., Chan Zyui Khyng. The analysis of the symmetrizing effect of the distributed generation // Transportnaya infrastruktura Sibirskogo regiona. Irkutsk, 2012. Т. 2. P. 75-81.
5. Kryukov A.V., Chan Zyui Khyng. Influence of installations of the distributed generation on quality of the electric power in systems of power supply of the railroads // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. № 4 (36). P. 162-167.
6. Arsent'ev M.O., Arsent'ev O.V., Kryukov A.V. Systems of power supply of railway transport with installations of the distributed generation. Irkutsk: IrGTU, 2013. 152 p.
7. Bulatov Yu.N., Kryukov A.V., Chan Zyui Khyng. Indistinct regulators for the wind generator of installations // Proceedings of the higher educational institutions. Energy Sector Problems. 2014. № 7-8. P. 60-69.
8. Bulatov Yu.N., Kryukov A.V., Chan Zyui Khyng. Intelligent regulators for installations of the distributed generation // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2015. № 2 (46). P. 83-95.
9. Bulatov Yu.N., Kryukov A.V., Chan Zyui Khyng. Network clusters in railway power supply systems. Irkutsk: IrGUPS, 2015. 205 p.
10. Arsent'ev M.O., Arsent'ev O.V., Kryukov A.V., Chan Zyui Khyng. The distributed generation in systems of power supply of the railroads. Irkutsk: IrGUPS, 2013. 164 p.
11. Bulatov Yu.N. The methodology of matched setting of automatic controllers of excitation and rate speed of power plants generators: avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk. Irkutsk, 2012. 22 p.
12. Bushuev V.V., Lizalek N.N., Novikov N.L. Dynamic properties of power supply systems. M.: Energoatomizdat, 1995. 320 p.

УДК 539.3:519.612

DOI: 10.18324/2077-5415-2016-2-91-99

Использование критериев обусловленности при численных расчетах напряженного состояния силовых конструкций

А.Н. Рогалев^{1 a}, С.В. Доронин^{2 b}¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок 50/44, Красноярск, Россия²Специальное конструкторско-технологическое бюро «Наука» Института вычислительных технологий СО РАН, пр. Мира 53, Красноярск, Россия^arogalyov@icm.krasn.ru, ^bs.doronin@gmail.com

Статья поступила 25.03.2016, принята 22.04.2016

Одним из основных вопросов при конечно-элементном моделировании высокоответственных технических систем является анализ точности полученных результатов. Решение этого вопроса позволяет обосновать надежность характеристик технических объектов. На точность результатов влияют ошибки округления и погрешность приближенных методов линейной алгебры, применяемых в конечно-элементном анализе, а также ошибки, имеющие непосредственное отношение к методу конечных элементов при выборе (построении) сетки конечных элементов, что прямо отражается в свойствах обусловленности матрицы жесткости и величине ошибки решения системы линейных уравнений с матрицей жесткости. Для численных решений, полученных методом конечных элементов, характеристика точности вычислительной ошибки может определяться как величина ошибки решения системы линейных уравнений с матрицей жесткости. Для анализа точности реализован апостериорный анализ ошибок численных вычислений путем двукратного решения системы линейных уравнений с матрицей жесткости, имеющей специально подобранную правую часть. Для полноты анализа результатов конечно-элементного моделирования изучаются числа обусловленности матрицы коэффициентов системы, что позволяет в первом приближении выявлять степень вырожденности матрицы коэффициентов и определять степень чувствительности численных решений к ошибкам. Применение этих процедур позволяет контролировать точность численного решения и анализировать сходимость. Развиваемый подход весьма актуален для конструкций ответственных технических объектов, так как ошибки при проектных расчетах здесь приводят к серьезным последствиям. Оценки вычислительной ошибки численного решения системы линейных алгебраических уравнений с матрицей жесткости применяются в статье для контроля точности в задачах расчета коэффициента концентрации напряжений в круговой пластине с эксцентричным круговым разрезом. Результаты вычислений подтверждают теоретические рассуждения.

Ключевые слова: вычислительная ошибка; матрица жесткости; моделирование; система линейных алгебраических уравнений; контроль точности.

Conditioning criteria in numerical computation of the stress state of load-bearing structures

A.N. Rogalyov^{1 a}, S.V. Doronin^{2 b}

¹Institute of Computer Simulation, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, Russia

²Design Bureau «Nauka», Institute of Computational Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 53, Mira ave., Krasnoyarsk, Russia

^arogalyov@icm.krasn.ru, ^bs.doronin@gmail.com

Received 25.03.2016, accepted 22.04.2016

One of the main problems in the finite element modeling of highly responsible technical systems is analysis of the accuracy of the results obtained. The solution of this problem allows to prove reliability of technical objects. Rounding errors and errors of approximate methods of linear algebra, used in the finite element analysis, influence the accuracy of the results as well as errors that are directly related to the method of finite elements in the selection (construction) of the finite element grid. This influence is reflected directly in the properties of a stiffness matrix and the size of the error while solving a system of linear equations with the stiffness matrix. For numerical solutions, obtained by finite element method, the characteristics for the accuracy of the computation error can be defined as the value of the error of the solution of linear equations with the stiffness matrix. To analyze the accuracy, a posteriori analysis of numerical computation errors has been realized by solving doubly the systems of linear equations with the stiffness matrix, having specially selected right side. To complete the analysis of the results of the finite element modeling, the condition number of the coefficients matrix of system has been studying which allows to identify the degree of degeneracy of the coefficient matrix at a first approximation and to determine the degree of sensitivity of numerical solutions to the errors. The use of these procedures allows to control the accuracy of the numerical solution and analyze the convergence. The approach proposed is very important for structuring the important technical objects, as errors in the design constructions lead to serious consequences. Estimates of computational error of the numerical solution of a system of linear algebraic equations with the stiffness matrix used in the article for accuracy control in problems of calculation of stress concentration factor in a circular plate with an eccentric circular cutting. The results confirm the theoretical reasoning.

Key words: numerical error; stiffness matrix; modeling; system of linear equations; accuracy control.

Введение

Расчеты высокоответственных силовых конструкций, выполненные численными методами (чаще всего методом конечных элементов (МКЭ)), являются важным инструментом инженерного анализа [1–4]. С его помощью получают прогноз физического поведения рассматриваемых конструкций и гарантии работы без отказов. Надежность и точность результатов такого прогноза зависят от 1) свойств математической постановки (идеализации), имеющейся информации и 2) характеристик численного (приближенного) решения математической задачи.

Корректность формулировок (идеализации), качественные и количественные оценки преобразованной информации (предположения, а также интерпретации) и оценки достоверности вычисленных результатов (в рамках доступной области приложений), как правило, определяются высококвалифицированными инженерами. Последние при решении задачи выбирают те методы, которые совместимы, с одной стороны, с их целями, а с другой стороны, с ограничениями, свойственными данному способу решения.

Вычисления обычно производят аналитики (вычислители) с использованием апробированного программного обеспечения. При благоприятных условиях программное обеспечение должно сообщать аналитику информацию о точности расчетных данных, что является важным для сравнения с точным (неизвестным) решением математической задачи.

Надежность приближенного численного решения эквивалентна четко сформулированному математиче-

скому вопросу о погрешности (ошибках) численного решения, и качество такого решения, как правило, сильно зависит от избранного типа дискретизации. Поэтому в современной вычислительной практике МКЭ широко используются так называемые адаптивные алгоритмы, в которых сетка последовательно улучшается. В процессе адаптации новый дискретный алгоритм конструируется на основе решения задачи на предыдущей (обычно более грубой) сетке. Поэтому стали развиваться исследования, направленные на построение апостериорных оценок погрешности, отличных от уже известных априорных оценок скорости сходимости, которые, как правило, оценивают только ее асимптотический порядок. Необходимость в таких оценках возникла и при проведении так называемых «доказательных вычислений» в работах [5–6], которые заложили основу так называемого метода невязок, в котором погрешность приближенного решения оценивается через норму невязки в пространстве образов оператора соответствующей краевой задачи. Как правило, необходимо выбирать норму некоторого класса распределений, что приводит к сложностям при ее вычислении.

Еще один метод построения индикаторов погрешности основан на постобработке поля напряжений, полученного по вычисленной аппроксимации поля перемещений. Впервые такой индикатор ошибки, часто называемый ZZ или Z2, описан в работах [7–8], он также близок к понятию суперсходимости [9]. В литературе под эффектом суперсходимости часто понимается улучшение аппроксимационных свойств приближенного решения, имеющее место и в некоторых точ-

ках конечных элементов, и интегрально по всей области, и в результате применения процедуры усреднения и различного рода процедур осреднения градиента приближенного решения. Метод применяется достаточно широко из-за своей простоты и незначительной вычислительной трудоемкости реализации.

В статье не ставится цель провести достаточно полный обзор методов оценки ошибки численных методов МКЭ. Отметим лишь, что описанные нами группы методов основаны на том факте, что рассматриваемое приближенное решение совпадает с галеркинской аппроксимацией — точным решением соответствующей конечномерной задачи.

Вопрос надежного контроля точности приближенных решений требует построения апостериорных оценок, удовлетворяющих ряду более жестких требований: необходимы неравенства, которые 1) дают гарантированные и вычисляемые оценки точности, 2) подходят для приближенных решений, полученных широким классом методов, 3) не содержат локальных постоянных и других данных, зависящих от сетки и второстепенных особенностей построения приближенного решения.

Одним из способов оценить надежность численного решения является количественное определение числа обусловленности (ЧО) матрицы коэффициентов как оценки чувствительности результатов решения к возмущениям коэффициентов. Возмущения решений могут возникать из-за численных ошибок округлений (являющихся результатом конечной точности машинной арифметики) и усечений промежуточных результатов (также результат конечной точности представления данных). Современные вычислительные машины оперируют с конечными десятичными дробями, представленными в форме с плавающей точкой. В этом случае уже на этапе запоминания элементов матрицы A и вектора b в памяти ЭВМ вносится ошибка округления, и реально вместо исходной системы:

$$Ax = b \tag{1}$$

решается возмущенная система:

$$(A + \delta A)x = b + \delta b, \tag{2}$$

где δA , δb — возмущения матрицы системы и вектора правой части.

Для элементов δa_{ij} матрицы δA и δb_i вектора δb справедливы оценки:

$$|\delta a_{ij}| \leq \varepsilon |a_{ij}|, \quad |\delta b_i| \leq \varepsilon |b_i|, \tag{3}$$

где a_{ij} — элемент матрицы A размерностью $n \times n$; b_i — элемент вектора b размерностью n ; ε — характеризующее относительную погрешность машинной арифметики.

Например, для двоичных ЭВМ, использующих арифметику с плавающей точкой и t -разрядную мантиссу, $\varepsilon = 2^{-t}$.

Перейдем к более общей числовой оценке возмущений.

Из записанных выше неравенств следует, что:

$$\|\delta A\| \leq \varepsilon \|A\|, \quad \|\delta b\| \leq \varepsilon \|b\|, \tag{4}$$

где знаком $\|\cdot\|$ обозначены какая-либо норма вектора и согласованная с ней норма матрицы.

Поясним суть одного из наиболее разработанных подходов к анализу устойчивости алгебраических методов.

Пусть x_h — приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученное применением некоторого прямого метода. Очевидно, что вследствие ошибок округления при реализации на ЭВМ прямого метода это решение не будет точно удовлетворять системе $Ax = b$. Пусть, однако, удастся показать, что x_h является точным решением системы:

$$(A + \delta A)x_h = b + \delta b.$$

Если для матрицы δA и вектора δb , называемых эквивалентными возмущениями метода, можно получить оценки вида:

$$\|\delta A\| \leq f(n) \|A\|, \quad \|\delta b\| \leq h(n) \|b\|, \tag{5}$$

где $f(n)$, $h(n)$ — некоторые степенные функции типа cn^k с небольшим показателем k , то метод считается устойчивым по Уилкинсону. Такой вид функций $f(n)$, $h(n)$ объясняется тем, что в процессе реализации прямых методов на ЭВМ неизбежно некоторое накопление ошибок округления, пропорциональное числу арифметических операций, за которое прямой метод приводит к решению.

Используя идеи обратного анализа ошибок Уилкинсона [10], мы предлагаем проводить вычисления двумя системами линейных алгебраических уравнений, имеющими одну матрицу коэффициентов A (матрицу жесткости). Первая система (исходная):

$$Ax = b_1 \tag{6}$$

имеет вектор $b_1 = (b_{1,i})_{i=1,n}$ правых частей, вторая система (тестовая, решение которой мы подбираем так, чтобы нормы правых частей этих систем совпадали):

$$Az = b_2. \tag{7}$$

Формируем вектор правых частей b_2 таким образом, чтобы полученная система имела известное решение т. е. каждый элемент вектора решения z равен:

$$z_i = \left(\frac{\max_k |b_{1,k}|}{\sum_{j=1}^n a_{sj}} \right)_{i=1,n}, \tag{8}$$

где номер s строки элементов, которые мы суммируем в знаменателе дроби, соответствует номеру максимального элемента правой части системы (6).

Для этих систем совпадают нормы матриц коэффициентов и равны нормы правых частей:

$$\max_k |b_{2,k}| = \max_k |b_{1,k}| \max_i |\alpha_i| = \max_k |b_k| \cdot 1 = \|b_1\|,$$

$$\text{где } \alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{j=1}^n a_{sj}}.$$

При численном решении систем (6) и (7) получаем ошибки:

$$x - x_{num} = A^{-1}(E + \Delta A \cdot A^{-1})(\Delta b - \Delta A \cdot A^{-1}b),$$

$$z - z_{num} = A^{-1}(E + \Delta A \cdot A^{-1})(\Delta b_1 - \Delta A \cdot A^{-1}b_1),$$

где E — матрица с единичными элементами по диагонали и нулевыми остальными.

Можно показать, что величина ошибки $\|z - z_{num}\|$ мажорирует сверху [11–12] величину $\|x - x_{num}\|$. Следует отметить, что специально подобранная правая часть системы (7) позволит нам получить также оценку ошибки решения МКЭ снизу.

Свойства практической реализации МКЭ в больших задачах. При проектировании ответственных и структурно-сложных конструкций требуется анализ их напряженно-деформированных состояний для оценки прочности и ресурса. Решение задач при этом осуществляется численно (преимущественно с использованием МКЭ) применительно к основным стадиям их создания: проектированию, изготовлению, испытаниям. На каждой из этих стадий проводится определение номинальных и местных напряженно-деформированных состояний с учетом нагруженности, а также характеристик сопротивления деформациям и разрушению, то есть выполняется очень большой объем численных экспериментов. Это влияет на требования к уровню достоверности результатов практических расчетов МКЭ.

Можно выделить особенности в реализации МКЭ применительно к большим задачам на основе двух подходов [12–13].

Первый (классический) подход в МКЭ предполагает анализ бесконечно малого элемента заданной области Ω . Соотношения, связывающие основные искомые функции и достаточные для их определения разрешающие уравнения, представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных, если рассматривается дву- или трехмерная область. При этом силовые конструкции должны описываться в перемещениях уравнениями равновесия эллиптического типа. Область определения $D(P)$ оператора задачи P в энергетической норме $(u, v)_P = (Pu, v)$, $\|v\|_P = \sqrt{(v, v)_P}$ пополняется до гильбертова пространства H_P (энергетического пространства оператора P), т. е. до пространств

ва классов эквивалентных, фундаментальных по Коши в норме $\|v\|_P$ последовательностей.

Как правило, рассмотрение МКЭ в этом подходе, а также анализ сходимости проводятся для однородных краевых задачи дифференциального уравнения $Lu = f$ с эллиптическим симметрическим и положительно-определенным в $L_2(\Omega)$ оператором.

В рамках второго подхода постановка задачи в конечных элементах может быть выполнена с использованием вариационных методов. В механике деформируемого твердого тела они принимают форму принципа стационарной (минимальной) потенциальной энергии. Среди всех допустимых состояний системы определяются те из них, которых соответствуют стационарной (минимальной) потенциальной энергии относительно малых допустимых вариаций перемещений. Из принципа возможных работ следует, что в состоянии равновесия полная потенциальная энергия системы минимальна. Согласно принципу стационарной потенциальной энергии строится уравнение:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{\sigma}^T T_{\epsilon} dV - \int_{\Omega} \tilde{u}^T P dV - \int_{\Gamma} \tilde{u}^T \phi dS - u^T p_c, \quad (9)$$

$$\delta \Pi = 0, \quad (10)$$

где T_{σ} , T_{ϵ} — соответственно тензоры напряжений и деформаций; P — узловые усилия; ϕ — усилия, действующие на границе Γ поверхности S области Ω ; p_c — сосредоточенные нагрузки; тильда используется для различения точных значений поля перемещений от перемещений в узлах сетки конечных элементов.

Следовательно, для нахождения решения выражение (9) нужно минимизировать на множестве всех функций v , удовлетворяющих граничным условиям, и та функция, которая доставляет минимум, будет искомым полем перемещений w .

Точное нахождение минимума $\Pi(v)$ эквивалентно решению дифференциального уравнения теории упругости и является бесконечномерной задачей. Идея сеточных методов состоит в замене бесконечномерной задачи n -мерной, т. е. в переходе к дискретной модели.

Решение задач программами, применяемыми к большому количеству задач, включает средства создания компьютерной модели в рамках второго подхода, или обработки САД-модели конструкции, изделия или его составной части. В этих программах есть возможность приложения действующих усилий или других проектных воздействий, исследований откликов системы различной физической природы в виде распределенных напряжений.

Число обусловленности как коэффициент чувствительности. Так как малые возмущения коэффициентов системы могут привести к большой ошибке численного решения, можно попытаться определить степень влияния плохой обусловленности при возмущении коэффициентов системы. Однако это только помо-

гает определить степень плохой обусловленности, но не величину ошибки. Если коренное изменение решения наблюдается при малом возмущении некоторого множества коэффициентов, система плохо обусловлена. Если данное возмущение коэффициентов не производит никаких изменений решения, то нельзя сделать никакого заключения [14]. Вероятность и масштабы ошибок решений заслуживают более пристального рассмотрения.

Разность между вычисленным решением x_h и точным решением x системы $Ax = b$ выражается простой формулой $\delta x = x - x_h$.

Если численное решение x_h отличается от точного решения x , то $Ax_h \neq b$, так что можно определить невязку $r = b - Ax_h$.

Первоначально числа обусловленности матрицы [14] были введены как средство априорной оценки того, насколько большими могут быть ошибки при решении системы $Ax = b$. Понятно, что удобно использовать относительные ошибки:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|r\|}{\|x\| \|b\|} \cdot \|b\| = \frac{\|A^{-1}\| \|b\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}. \quad (11)$$

Это неравенство определяет естественное число обусловленности $\frac{\|A^{-1}\| \|b\|}{\|x\|}$.

Можно исключить зависимость от x и получить тем самым стандартное число обусловленности (стандартное ЧО) $\chi_p(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$. Отметим, что оба способа записи числа обусловленности представляют собой только оценки того, насколько могут быть увеличены погрешности в задании b . Они всегда дают завышенную оценку увеличения, иногда значительно завышенную, однако для специальных случаев они точны.

Если величина $\chi_p(A)$ велика, то это является предупреждением (не строго достоверным утверждением), что малые возмущения матрицы A и правой части b могут привести к значительным отклонениям между численным решением x_h и точным решением x [15–16].

Хотя представляется, что вычисление числа обусловленности относительно просто, как правило, A^{-1} не известно на практике. Кроме того, при работе с большими системами уравнений, которые преобладают в конечно-элементном анализе, вычисление обратной матрицы A^{-1} связано с большими вычислительными затратами. Даже если потратить время на вычисление A^{-1} , будет неизвестно, точно ли вычислена результирующая матрица, поскольку неизвестна обусловленность матрицы коэффициентов [14].

В [17] Хагер опубликовал метод оценки числа обусловленности матрицы, который получил свое дальнейшее развитие [18–21]. Было отмечено, что вычисление числа обусловленности матрицы выполнить легко,

когда известна обратная матрица A^{-1} , но это требует много вычислительных затрат. По этим причинам Хагер сосредоточился на задаче определения оценок p -норм обратной матрицы $\|A^{-1}\|_1$ и $\|A^{-1}\|_\infty$ (1-норма $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, ∞ -норма $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$) на основе коэффициентов матрицы A , а не обратной матрицы.

Алгоритм Хагера реализуется путем вычисления оценки $\gamma \leq \|A^{-1}\|_1$ для заданной матрицы $A \in R^{n \times n}$ следующим образом.

Выбираем x так, чтобы $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| = 1$. Далее:

```
repeat
    решить систему  $Ay = x$ 
     $\xi = \text{sign}(y)$ 
    решить систему  $A^T z = \xi$ 
    if  $\|z\|_\infty = \max_j |z_j| < z^T x$ 
         $\gamma = \|y\|_1 = \sum_{j=1}^n |y_j|$ 
    quit
     $x := e_j$ , где  $|z_j| = \|z\|_\infty = \max_j |z_j|$ 
end.
```

В [18] опубликован анализ этого алгоритма и показана его практическая эффективность: оценка максимума достигается за две-три итерации и совпадает по порядку с точным числом обусловленности, что является относительно хорошим результатом. Позже в [19–21] проведена модификация и улучшение реализации этого алгоритма. Этот усовершенствованный метод был позднее включен в пакет MATLAB в виде функции `condest`.

Используя подход Хагера на основе оценки нормы обратной матрицы, в работе выполнена реализация нескольких подходов вычисления числа обусловленности и получены примеры результатов их использования.

Метод 1

1. Для заданной матрицы A (матрицы жесткости) формируем вектор b правых частей таким образом, чтобы полученная система имела решение $(1, 1, \dots, 1)$ т. е. вектор b полагаем равным сумме столбцов матрицы A .

2. Решаем полученную систему $Ax = b$ и получаем вектор решения x .

3. Находим норму ошибки численного решения (точное решение мы знаем) $\|e\| = \max_i |x_i - 1|$.

4. В качестве оценки числа обусловленности выбираем число $\chi = \frac{10 \cdot e}{\varepsilon} + 1$, где ε — машинное эpsilon (машинная точность выполнения арифметических опе-

раций) для используемой арифметики (т. е. $\varepsilon = 10^{-15}$ для арифметики double и $\varepsilon = 10^{-7}$ для арифметики float).

Метод 2

Для вычисления числа обусловленности предлагается определить A^{-1} и ее норму. Обозначим:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда $A \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

(по определению обратной матрицы). Для каждого столбца обратной матрицы можно записать следующее равенство:

$$A \cdot \begin{pmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ \vdots \\ d_{ii} \\ \vdots \\ d_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, мы получим i -й столбец обратной матрицы. Выполнив решение подобных систем n раз, мы находим все столбцы обратной матрицы, и далее можно вычислить норму обратной матрицы, пользуясь любой формулой нормы:

$$\|A^{-1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |d_{ij}| \right), \text{ либо } \|A^{-1}\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |d_{ij}| \right).$$

Далее $\chi = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Метод 3

Для вычисления числа обусловленности предлагается оценить $\|A^{-1}\|$. Заметим, что если $w = A^{-1}y$, то $\|w\| \leq \|A^{-1}\| \|y\|$ и, следовательно, $\|A^{-1}\| \geq \frac{\|w\|}{\|y\|}$. Можно выбрать k векторов $y_i, i = 1, 2, \dots, k$, решить системы $Aw_i = y_i$ и положить:

$$\|A^{-1}\| = \max_i \frac{\|w_i\|}{\|y_i\|}.$$

Если выборка пробных векторов k мала, то это вычисление потребует около kn^2 операций, что не много по сравнению с общими трудозатратами на решение $Ax = b$. Эвристически установлено, что если y выбрать

случайным образом, то ожидаемой оценкой $\frac{\|w\|}{\|y\|}$ будет

$\frac{1}{2} \|A^{-1}\|$. Таким образом, представляется достаточно надежным использовать небольшие значения k . Результат алгоритма — оценка $\|A^{-1}\| \geq \frac{\|x\|}{\|b\|}$ с малыми вычислительными затратами.

Метод 4

Для оценки $\|A^{-1}\|$ вектор y ищется из системы уравнений $A^T y = e$, где вектор e с компонентами ± 1 выбирается случайным образом. Далее вектор w ищется из системы $Aw = y$ и $\|A^{-1}\|$ оценивается отношением $\frac{\|w\|}{\|y\|}$.

Заметим, что при увеличении размерности матрицы большинство ее норм также увеличивается, соответственно растет число обусловленности.

Рассмотрим задачу вычисления значений непрерывного отображения F , действующего из одного линейного нормированного пространства в другое и определенного на открытом множестве D_F . Предположим, что $0 \notin D_F, 0 \notin FD_F$.

Пусть точка $x \in D_F$ задана с абсолютной погрешностью, не большей некоторого $\varepsilon > 0$. Это означает, что задана точка $g \in D_F$ такая, что $\|x - g\| \leq \varepsilon$. Будем считать ε настолько малым, что $K(g, \varepsilon) \equiv \{x : \|x - g\| \leq \varepsilon\} \subset D_F$. Задачу вычисления F_x в описанной ситуации обозначим через F_g^ε [22].

Так как положение точки в шаре $K(g, \varepsilon)$ не фиксируется никакими дополнительными условиями, то каждое из значений $F_x (x \in K(g, \varepsilon))$ может оказаться истинным. Однако в действительности вычисляется лишь приближение F_g . Но тогда весьма существенно суметь оценить степень надежности результата вычисления. Считаем, что F_g вычисляется абсолютно точно. Таким образом, речь идет не о погрешностях округлений, а о степени устойчивости результата по отношению к исходным данным. Приведем следующие определения.

Мерой обусловленности задачи F_g^ε назовем величину:

$$\chi(F, g, \varepsilon) = \sup_{\substack{x \in K \\ x \neq g}} \left\{ \frac{\|F_x - F_g\|}{\|F_g\|} \cdot \frac{\|x - g\|}{\|g\|} \right\}.$$

Выражение в скобках есть частное относительных погрешностей приближенных равенств $F_x \approx F_g, x \approx \tilde{g}$.

Пусть зафиксирована некоторая система счисления с основанием $p > 1$. Мерой неопределенности задачи

F_g^ε называется величина $I(F, g, \varepsilon) = \log_g c(F, g, \varepsilon)$. Мера неопределенности $I(F, g, \varepsilon)$ представляет собой максимально возможную потерю информации при преобразовании x в F_x отображением F в ε -окрестности точки g . Здесь сравнивается информация об x , содержащаяся в g с информацией об F_x , содержащейся в F_g^ε . Информация измеряется числом верхних знаков. Зная меру неопределенности задачи (или ее оценку), можно оценить число резервных знаков в исходных данных, достаточное для надежного вычисления.

Пусть теперь $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим предельную задачу F_g^ε . Предположим, что отображение F дифференцируемо в точке g :

$$F(x) = F(g) + F'(g)(x - g) + o(\|x - g\|), \quad x \rightarrow g.$$

Мерой обусловленности задачи F_g называется величина:

$$\chi(F, g) = \frac{\|g\| \cdot \|F'(g)\|}{\|F_g\|}, \quad (12)$$

мерой неопределенности задачи F_g — величина:

$$I(F, g) = \log_p \chi(F, g). \quad (13)$$

Легко установить, что:

$$c(F, g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(F, g, \varepsilon). \quad (14)$$

Но $\chi(F, g, \varepsilon)$ при убывании ε не возрастает. Поэтому справедлива лемма.

Лемма 1. Выполняется неравенство:

$$\chi(F, g, \varepsilon) \geq \chi(F, g).$$

Следовательно,

$$I(F, g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(F, g, \varepsilon), \quad I(F, g, \varepsilon) \geq I(F, g),$$

т. е. мера неопределенности задачи $Comp(F, g)$ представляет собой минимальную неустранимую потерю информации при использовании приближения g .

Пример использования критериев обусловленности численного решения. Рассмотрим задачу о концентрации напряжений для круговой пластины с эксцентрично расположенным круговым отверстием, по границе которого приложено внутреннее давление. Эта задача возникает в основном при расчетах нестандартных трубопроводов с эксцентричным каналом. Расчетная схема характеризуется радиусами R пластины и r отверстия, эксцентриситетом q расположения центра отверстия, внутренним давлением на его поверхности (рис. 1).

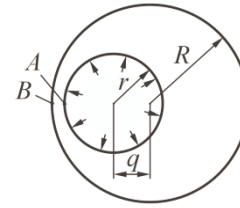


Рис. 1. Расчетная схема круговой пластины с отверстием

В [23] приведены совпадающие результаты численного решения Халберта и аналитического решения Г.Н. Савина для случая $r/R = 0,5$, представляющие собой зависимости коэффициентов концентрации напряжений k_A и k_B от отношения q/R в точках А и В соответственно.

Нами эта задача решена для случая $q/R = 0,2$, $R = 20$ мм. Для этих условий коэффициенты концентрации составляют $k_A = 2,17$ и $k_B = 1,65$ [23]. С учетом условий симметрии построена конечно-элементная модель с использованием сетки треугольных конечных элементов, генерируемой под управлением параметра *esize* — среднего размера ребра треугольника (рис. 2).

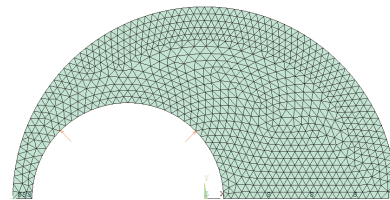


Рис. 2. Конечно-элементная модель

Расчетные значения $k_{расчА}$ и $k_{расчВ}$ демонстрируют сходимость решения по сетке конечных элементов к данным Савина–Халберта, сопровождаемую прогрессивным ростом размерности $n \times n$ матрицы жесткости (табл. 1). В табл. 2 представлены значения чисел обусловленности матриц жесткости, полученных для некоторых значений шага сетки. Кроме описанных в настоящей работе критериев использован угловой критерий обусловленности [24].

В результате вычислений оценок чисел обусловленности матриц жесткости и сравнительного анализа их эффективности установлено следующее.

Таблица 1

Расчетные значения коэффициентов концентрации напряжений в связи с шагом сетки

esize, мм	n	$k_{расчА}$	$k_{расчВ}$
2,0	3 285	2,1585	1,6456
1,75	4 269	2,1721	1,6502
1,5	5 757	2,1645	1,6487
1,2	9 165	2,1646	1,6501
1,0	12 981	2,1657	1,6499
0,8	20 301	2,1680	1,6506

Таблица 2

Литература

Оценки критериев обусловленности

Вариант критерия	Шаг сетки $esize$, мм			
	2,0	1,5	1,0	0,8
Стандартное ЧО	$1,75 \cdot 10^7$	$2,88 \cdot 10^7$	$6,31 \cdot 10^7$	$1,00 \cdot 10^8$
1 метод	$1,80 \cdot 10^4$	$5,01 \cdot 10^4$	$1,48 \cdot 10^5$	$2,22 \cdot 10^5$
2 метод	$1,17 \cdot 10^7$	$2,08 \cdot 10^7$	$4,91 \cdot 10^7$	$8,21 \cdot 10^7$
3 метод	$2,79 \cdot 10^6$	$4,83 \cdot 10^6$	$1,13 \cdot 10^7$	$2,33 \cdot 10^7$
4 метод	$7,63 \cdot 10^6$	$1,36 \cdot 10^7$	$3,09 \cdot 10^7$	$5,34 \cdot 10^7$
Угловой	$8,38 \cdot 10^4$	$1,13 \cdot 10^5$	$1,68 \cdot 10^5$	$2,13 \cdot 10^5$

С уменьшением шага сетки и, как следствие, размерности матрицы жесткости числа обусловленности по всем критериям закономерно возрастают.

Стандартное число обусловленности оказывается наибольшим из всех рассмотренных альтернативных вариантов. Наименьшими являются угловое и определенное по методу 1 числа обусловленности. Они отличаются также нетребовательностью к вычислительным ресурсам и определяются весьма быстро.

Вычисления стандартного числа обусловленности, а также чисел в соответствии с методом 2 характеризуются высокой ресурсоемкостью. Числа обусловленности в соответствии с методами 3 и 4 вычисляются довольно медленно, но быстрее, чем по методу 2.

Полученные численные результаты подтверждают приведенные в статье рассуждения и обоснования.

Заключение

Первоначально число обусловленности матрицы было введено как средство априорной оценки того, насколько большими могут быть ошибки при решении системы $Ax = b$. Такое использование стандартного числа обусловленности оказалось не очень надежным: большие его значения не обязательно свидетельствуют о значительном уровне ошибки.

Предложенные методы оценки критериев обусловленности сделали их более полезными: они получаются меньшими и более приближенными к реальности. Однако главным образом положительный эффект достигается при использовании числа обусловленности для апостериорной оценки ошибок: сначала задача решается, а затем оценивается правильность полученного решения. При такой оценке бывает полезна различная информация, полученная в процессе решения системы $Ax = b$.

В статье предлагается апостериорная оценка ошибки решения СЛАУ с матрицей жесткости с помощью решения СЛАУ с той же матрицей жесткости и правой частью, норма которой равна норме правой части исходной системы. Такой подход показал свою эффективность в задачах анализа напряженно-деформированного состояния высокоответственных технических объектов.

1. Чернявский А.О. Метод конечных элементов. Основы практического применения. М.: Машиностроение, 2007. 106 с.
2. Akin J.E. Finite element analysis with error estimators. Oxford. England: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 512 p.
3. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. Concepts and applications of finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, 2002. 719 p.
4. Reddy J.N. An introduction to the finite element method. New York: McGraw-Hill Companies, 2006. 766 p.
5. Babuska I., Rheinboldt W.C. A-posteriori error estimates for the finite element method // Internat. J. Numer. Meth. Engng. 1978. № 12. P. 1597-1615.
6. Babuska I., Rheinboldt W.C. Error estimates for adaptive finite element computations // SIAM J. Numer. Anal. 1978. № 15 (4). P. 736-754.
7. Zlamal M. Superconvergence and reduced integration in the finite element method // Math. Comp. 1978. Vol. 32, № 143. P. 663-685.
8. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Internat. J. Numer. Methods Engineering. 1987. Vol. 24, № 2. P. 337-357.
9. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Исследование скорости сходимости вариационно-разностных схем для эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с гладкой границей // Журнал вычислительной математической и математической физики. 1969. Т. 9. С. 1102-1120.
10. Wilkinson J.A. Rounding errors in algebraic processes. London: Her Majesty's Stationary Office. 1963. 161 p.
11. Доронин С.В., Рогалев А.Н. Оценка вычислительной ошибки решения задачи о растяжении пластины с дуговым вырезом // Вестн. машиностроения. 2015. № 1. С. 24-27.
12. Рогалев А.Н., Доронин С.В., Рейзмунт Е.М. Опыт решения и постановки обратных задач конструкционной прочности // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики-2015: тр. междунар. конф. Новосибирск: Абвей, 2015. С. 630-637.
13. Bathe K.-J. Finite Element Procedures. Prentice Hall, 2006. 1052 p.
14. Zarowski C.J. An Introduction to Numerical Analysis for electrical and computer engineers. New York: John Wiley & Sons, 2004. 608 p.
15. Turing G A. M. Rounding-off errors in matrix processes. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1, № 1. P. 287-308.
16. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations // J. Hopkins University Press, 3rd ed., 1996.
17. Hager W.W. Condition estimates // SIAM Journal on scientific and statistical computing. 1984. Vol. 5, № 2. P. 311-316.
18. Higham N.J. A survey of condition number estimation for triangular matrices // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1987. Vol. 29, № 4. P. 575-596.
19. Higham N.J. FORTRAN codes for estimating the one-norm of a real or complex matrix, with applications to condition estimation // ACM Transactions on Mathematical Software. 1988. Vol. 14, № 4. P. 381-396.
20. Higham N.J., Tisseur F. A block algorithm for matrix 1-norm estimation, with an application to 1-norm pseudospectra // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 2000. Vol. 21, № 4. P. 1185-1201.

21. Kannan R., Hendry S., Higham N., Tisseur F. Detecting the causes of ill-conditioning in Structural Finite Element Models [Электронный ресурс] // MIMS EPrint: 2013. № 35 (Manchester Institute for Mathematical Sciences School of Mathematics. The University of Manchester). URL <http://www.manchester.ac.uk/mims/eprints> (дата обращения: 13.03.16).

22. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1967. 475 с.

23. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений: графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность. М.: Мир, 1977. 304 с.

24. Калиткин Н.Н., Юхно Л.Ф., Кузьмина Л.В. Количественный критерий обусловленности систем линейных алгебраических уравнений // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 2. С. 3-26.

References

1. Chernyavskii A.O. Finite element method. The grounds of practical applications. М.: Mashinostroenie, 2007. 106 p.

2. Akin J.E. Finite element analysis with error estimators. Oxford. England: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 512 p.

3. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. Concepts and applications of finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, 2002. 719 p.

4. Reddy J.N. An introduction to the finite element method. New York: McGraw-Hill Companies, 2006. 766 p.

5. Babuska I., Rheinboldt W.C. Aposteriori error estimates for the finite element method // Internat. J. Numer. Meth. Engng. 1978. № 12. P. 1597-1615.

6. Babuska I., Rheinboldt W.C. Error estimates for adaptive finite element commutations // SIAM J. Numer. Analys. 1978. № 15 (4). P. 736-754.

7. Zlamal M. Superconvergence and reduced integration in the finite element method // Math. Somp. 1978. Vol. 32, № 143. P. 663-685.

8. Zienkiewicz O.S., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Internat. J. Numer. Methods Engineering. 1987. Vol. 24, № 2. P. 337-357.

9. Oganessian L.A., Rukhovets L.A. Investigation for convergence rate of variation-difference schemes for elliptical second-order equations in two-dimensional region with smooth boundary // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. 1969. T. 9. P. 1102-1120.

10. Wilkinson J.A. Rounding errors in algebraic processes. London: Her Majesty's Stationary Office. 1963. 161 p.

11. Doronin S.V., Rogalev A.N. Error in calculating the extension of a plate with a circular notch // Russian Engineering Research. 2015. № 1. P. 24-27.

12. Rogalev A.N., Doronin S.V., Reizmunt E.M. The experience for solving and definition of structural strength inverse problems // Aktual'nye problemy vychislitel'noi i prikladnoi matematiki-2015: tr. mezhdunar. konf. Novosibirsk: Abvei, 2015. P. 630-637.

13. Bathe K.-J. Finite Element Procedures. Prentice Hall, 2006. 1052 p.

14. Zarowski C.J. An Introduction to Numerical Analysis for electrical and computer engineers. New York: John Wiley & Sons, 2004. 608 p.

15. Turing A.M. Rounding-off errors in matrix processes. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1, № 1. P. 287-308.

16. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations // J. Hopkins University Press, 3rd ed., 1996.

17. Hager W.W. Condition estimates // SIAM Journal on scientific and statistical computing. 1984. Vol. 5, № 2. P. 311-316.

18. Higham N.J. A survey of condition number estimation for triangular matrices // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1987. Vol. 29, № 4. P. 575-596.

19. Higham N.J. FORTRAN codes for estimating the one-norm of a real or complex matrix, with applications to condition estimation // ACM Transactions on Mathematical Software. 1988. Vol. 14, № 4. P. 381-396.

20. Higham N.J., Tisseur F. A block algorithm for matrix 1-norm estimation, with an application to 1-norm pseudospectra // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 2000. Vol. 21, № 4. P. 1185-1201.

21. Kannan R., Hendry S., Higham N., Tisseur F. Detecting the causes of ill-conditioning in Structural Finite Element Models [Elektronnyi resurs] // MIMS EPrint: 2013. № 35 (Manchester Institute for Mathematical Sciences School of Mathematics. The University of Manchester). URL <http://www.manchester.ac.uk/mims/eprints> (data obrashcheniya: 13.03.16).

22. Glazman I.M., Lyubich Yu.I. Finite dimensional linear analysis. М.: Nauka, 1967. 475 p.

23. Peterson R. Stress concentration factors: charts and relations useful in making strength calculations for machine parts and structural elements. М.: Mir, 1977. 304 p.

24. Kalitkin N.N., Yuhno L.F., Kuz'mina L.V. Quantitative criterion of conditioning for systems of linear algebraic equations // Matematicheskoe Modelirovanie. 2011. Т. 23, № 2. P. 3-26.