

## Некоторые аспекты сплющивания сферических неровностей шероховатой поверхности для задач герметологии

П.М. Огар<sup>a</sup>, Е.В. Угрюмова<sup>b</sup>, К.Н. Фигура<sup>c</sup>, В.С. Кушнарев<sup>d</sup>

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

<sup>a</sup> ogar@brstu.ru, <sup>b</sup> hellensh@yandex.ru, <sup>c</sup> figura\_85@mail.ru, <sup>d</sup> kushvs@yandex.ru

<sup>a</sup> <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>,

<sup>b</sup> <https://orcid.org/0000-0002-0764-2028>,

<sup>c</sup> <https://orcid.org/0000-0002-0777-0089>,

<sup>d</sup> <https://orcid.org/0000-0003-3931-2215>

Статья поступила 28.10.2019, принята 11.11.2019

*В статье указано на множество исследований для разработки подходящих моделей для описания упругопластического контакта, но каждая из них является точной только в небольшом диапазоне свойств материала или начальных условий. Для упрощения проблемы в большинстве случаев моделируют контакт сферы и плоскости, поэтому модели контактов разделили на две основные группы: модели внедрения и модели сплющивания. Приведен критический обзор и анализ существующих моделей сплющивания сферических неровностей для их возможного использования при решении задач герметологии. Большинство моделей сплющивания предполагает, что деформация является упругой идеально пластической, поэтому в материале не происходит упрочнение. Однако даже для этого упрощенного случая отсутствуют точные общие решения упругопластического контакта деформируемой сферы и жесткой плоскости. Из приведенного обзора следует, что обобщенные эмпирические выражения для расчета контактной нагрузки и контактной площади, основанные на допущении об упругом идеально пластичном контакте, не дают требуемого решения для материалов, обладающих характеристиками деформационного упрочнения. Приведены ограниченные случаи учета при сплющивании сферы деформационного упрочнения. Указано, что для определения плотности зазоров необходимо знать распределение давления на площадке контакта, однако этот вопрос рассмотрен только в одной работе без каких-либо обобщений. Большим достижением можно считать формулирование перехода между двумя ограничивающими моделями сплющивания и внедрения. Полученные при этом феноменологические уравнения для деформации обоих тел, радиуса площадки контакта, силы контакта и среднего давления (твердости) являются более общими, чем для отдельных моделей вдавливания и сплющивания. К сожалению, этот вопрос рассмотрен без учета деформационного упрочнения.*

**Ключевые слова:** упругопластический контакт; шероховатая поверхность; сферическая неровность; сплющивание сферы; деформационное упрочнение; контактные характеристики.

## Some aspects of flattening of spherical asperities of a rough surface for the problems of hermetic sealing study

P.M. Ogar<sup>a</sup>, E.V. Ugryumova<sup>b</sup>, K.N. Figura<sup>c</sup>, V.S. Kushnarev<sup>d</sup>

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>a</sup> ogar@brstu.ru, <sup>b</sup> hellensh@yandex.ru, <sup>c</sup> figura\_85@mail.ru, <sup>d</sup> kushvs@yandex.ru

<sup>a</sup> <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>,

<sup>b</sup> <https://orcid.org/0000-0002-0764-2028>,

<sup>c</sup> <https://orcid.org/0000-0002-0777-0089>,

<sup>d</sup> <https://orcid.org/0000-0003-3931-2215>

Received 28.10.2019, accepted 11.11.2019

*The article indicates a lot of research to develop suitable models for describing elastoplastic contact, but each of them is accurate only in a small range of material properties or initial conditions. In this regard, the models of a contact sphere and a plane should be divided into two main groups: implementation models and flattening models. A critical review and analysis of existing models of flattening of spherical asperities for their possible use in solving problems of hermetology is given. Most flattening models assume that the deformation is elastic perfectly plastic, therefore, hardening does not occur in the material. However, there are no exact general solutions for the deformable sphere and rigid plane. It follows from the review that generalized empirical expressions for the calculation of contact load and contact area, based on the assumption of elastic perfectly plastic contact, do not provide the required solution for materials with strain hardening. Limited cases of accounting when flattening the sphere of strain hardening are presented. However, this issue was considered only in one paper without any generalizations. A great achievement is the formulation of the transition between the two limiting models of flattening and indentation. The phenomenological equations obtained in this case for the deformations of both bodies, the radius of the contact area, forces and average pressure (hardness) are more accessible than for individual models of pressure and flattening. Unfortunately, this issue was considered without regard to strain hardening.*

**Keywords:** elastoplastic contact; rough surface; spherical roughness; flattening of the sphere; strain hardening; contact characteristics.

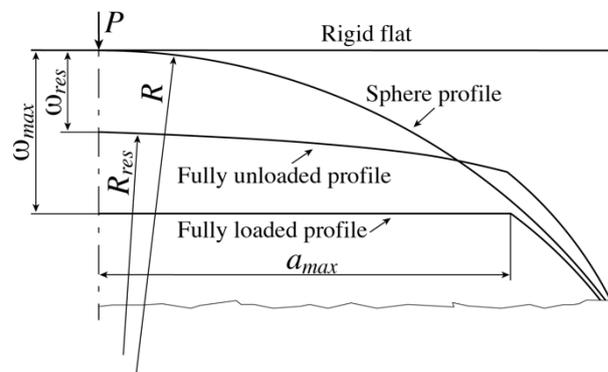
**Введение.** Инженерные поверхности шероховаты на микроуровнях. Из-за этого контакт между инженерными поверхностями дискретный, реальный же контакт происходит только на отдельных неровностях. Расчет реальной площади контакта и других характеристик для всей поверхности является сложной задачей из-за разницы в радиусах и высотах неровностей. Из-за такой сложности в контактной задаче был принят упрощенный подход, предполагающий вершины неровностей сферической формы с одинаковым радиусом. Этот подход оказался очень удобным для решения проблем трибомеханики. Исследования контактной механики шероховатых поверхностей зарубежными учеными в большинстве основаны на методе расчета контактных характеристик, разработанном Гринвудом и Уильямсоном (модель GW) [1]. Модель GW использует теорию Герца для стохастического моделирования всей контактирующей поверхности неровностей с гауссовым распределением по высоте и справедлива для случая упругого контакта. Для аналитических целей модель GW предполагает, что контакт двух шероховатых поверхностей может быть смоделирован как контакт эквивалентной шероховатой поверхности с гладкой плоскостью. Отечественные исследователи в основном используют метод расчета контактных характеристик, разработанный И.В. Крагельским и Н.Б. Демкиным (модель KD) [2; 3]. В указанных работах используется модель шероховатости в виде набора сферических неровностей, распределение которых по высоте соответствует начальной части кривой опорной поверхности шероховатого слоя, которая описывается параболой. Авторами [4] для решения задач герметологии предложена модель шероховатости в виде набора сферических сегментов (модель ОК), распределение которых по высоте соответствует всей кривой опорной поверхности, описываемой регуляризованной неполной бета-функцией.

Контакт между двумя объектами является одной из наиболее распространенных проблем в машиностроении, которая имеет приложения в трибологии [5–9], герметологии [10–14], при определении механических свойств материалов [15–19], в задачах поверхностно-пластического деформирования [20; 21], в механике столкновений [22; 23], в электрических контактах [24; 25], термоконтактах [26–28] и в других отраслях.

В прошлом было выполнено много аналитических, экспериментальных и численных исследований с целью моделирования и прогнозирования свойств контакта [29; 30], таких как реальный радиус контакта, среднее давление (твердость) и сила контакта; однако из-за сложности процесса не было предложено замкнутого решения для упругопластических контактов. Исключение составляет работа [31] о внедрении жесткой сферической неровности в упрочняемое упругопластическое полупространство. Теорию Герца [32] можно использовать для упругих контактов, но в большинстве случаев существуют пластические деформации. Когда сила контакта достигает критического значения, напряженное состояние начнет вызывать текучесть внутри сферы. Многие численные анализы были выполнены для разработки подходящих моделей для упругопла-

стического контакта, но каждая из моделей является точной только в небольшом диапазоне свойств материала или начальных условий. Чтобы упростить проблему, в большинстве моделируют контакт сферы и плоскости. До недавнего времени модели контактов разделяли на две основные группы [33], модели внедрения и модели сплющивания. В моделях сплющивания плоскость считается жесткой, а сфера деформируется, в то время как в моделях внедрения плоскость деформируется, а полусфера либо жесткая, либо упругая. В работе [3] Н.Б. Демкин полагал, что параметры контактного взаимодействия при внедрении сферических неровностей в менее твердую поверхность или при сплющивании сферических неровностей более твердой поверхностью примерно одинаковы. При упругом контакте справедливость такого подхода не вызывает сомнений, но при упругопластическом он не является очевидным и нуждается в дополнительном исследовании. Такие исследования были проведены авторами [29], которые изучали процессы сплющивания и внедрения путем введения новой переменной — коэффициента текучести  $S_y^*$ , определяемого как отношение пределов текучести материалов сферы и плоскости. Они показали, что коэффициент текучести может быть использован для формулирования перехода между двумя ограничивающими моделями сплющивания и внедрения. Были проанализированы деформации обоих тел, радиус контакта, сила контакта и средние давления (твердость) и получены феноменологические уравнения, которые являются более общими, чем для моделей вдавливания и сплющивания.

При внедрении сферических неровностей для задач герметологии используется модель упругопластического контакта, предложенная авторами [31], для которой получено замкнутое решение для всего диапазона упругопластического контакта. При этом использованы свойства диаграммы кинетического индентирования, линейная зависимость глубины остаточной лунки от приложенной нагрузки, понятие пластической твердости как меры сопротивления пластической деформации.



**Рис.** Схема нагруженного и разгруженного профиля при сплющивании сферы плоской поверхностью

В то же время, отсутствуют достоверные модели сплющивания сферических неровностей шероховатых поверхностей для задач герметологии, позволяющие определить, например, плотность зазоров в стыке.

Целью настоящей работы являются обзор и анализ существующих моделей сплющивания сферических неровностей (см. рис.) для их возможного использования при решении задач герметологии.

**Эволюция моделей сплющивания.** Первая упругопластическая эмпирическая модель была предложена авторами [34] для преодоления разрыва между идеально упругой и идеально пластической деформациями (модель СЕВ). Контакт является упругим до критического перемещения, выше которого наложено условие сохранения объема сферы. Распределение контактного давления для пластически деформированной сферы предполагалось равномерным и равным максимальному герцевскому давлению при критическом перемещении. Модель СЕВ имеет разрыв в контактной нагрузке, а также в первых производных как контактной нагрузки, так и площади контакта при переходе от упругого контакта к упругопластическому. Эти недостатки стали причиной для модификации модели другими исследователями. Авторы [35] предложили равномерное распределение давления, равное максимальному давлению при критическом перемещении, в центральной части области контакта и эллиптическое распределение вне этой части, начиная с максимального давления и приближаясь к нулю на границе контакта. W. Chang [36] использовал приближенную линейную интерполяцию для упруго-пластического режима, связывая значение контактных нагрузок при критическом перемещении и в начале полностью пластического режима. Авторы [37] (модель ZMC) использовали математические манипуляции для сглаживания переходов между выражениями для контактной нагрузки и площади контакта для упругой и упругопластической деформации.

Kogut и Etsion [38] представили точное конечно-элементное решение упругопластического контакта сферы, прижатой к жесткой плоскости, для любого вида деформации (модель KE). Они дали удобные эмпирические выражения для связи безразмерного среднего контактного давления, безразмерной контактной нагрузки и безразмерной площади контакта с безразмерным относительным перемещением, таким образом, решение не ограничено конкретным материалом. Их результаты показывают, что полностью пластическая деформация на поверхности контакта происходит, когда безразмерное относительное перемещение  $\omega^* = 110$ , на этом этапе отношение среднего контактного давления  $p$  к пределу текучести  $S_y$  достигает 2.8, т. е. значение давления в этой точке равно твердости материала, которая была указана Д. Тейбором в его экспериментах для многих материалов [39]. Модель KE описывается следующими выражениями:

критическое перемещение [33]:

$$\omega_c = \left( \frac{\pi KH}{2E^*} \right)^2 R, \quad (1)$$

где  $H = 2.8S_y$  — твердость [39];  $K = 0.454 + 0.41\nu$  — параметр, зависящий от коэффициента Пуассона  $\nu$  [40];  $E^*$  — приведенный модуль упругости:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2},$$

где  $E_i$  и  $\nu_i$  — модули упругости и коэффициенты Пуассона контактирующих тел;

безразмерное среднее контактное давление:

$$\frac{p}{S_y} = 1.19 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{0.289}, \quad 1 \leq \omega/\omega_c \leq 6; \quad (2)$$

$$\frac{p}{S_y} = 1.61 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{0.117}, \quad 6 \leq \omega/\omega_c \leq 110; \quad (3)$$

безразмерные нагрузка и площадь контакта:

$$\frac{P}{P_c} = 1.03 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1.425}, \quad \frac{A}{A_c} = 0.93 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1.136}, \quad 1 \leq \omega/\omega_c \leq 6; \quad (4)$$

$$\frac{P}{P_c} = 1.40 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1.263}, \quad \frac{A}{A_c} = 0.94 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1.146}, \quad 6 \leq \omega/\omega_c \leq 110, \quad (5)$$

где:

$$P_c = 4E^*R^{1/2}\omega_c^{3/2}, \quad A_c = \pi R\omega_c. \quad (6)$$

Авторами [38] было установлено, что развитие упругопластического контакта можно разделить на три отдельных этапа. Первый — для  $1 \leq \omega/\omega_c \leq 6$ , где пластическая область развивается ниже поверхности сферы, а вся контактная область является упругой. Второй — для  $6 \leq \omega/\omega_c \leq 68$ , где площадь контакта является упругопластической, а третий этап — для  $\omega/\omega_c > 68$ , где область контакта является полностью пластической. Они оценивали параметры контакта для упругого идеально пластического случая и сравнивали их с различными уровнями деформационного упрочнения. Для случая предельного касательного модуля ( $E_t = 0,1E$ ) получено, что разница между упругим идеально пластическим режимом и общим упругопластическим случаем составляет менее 20 %, и делается вывод, что эмпирические соотношения для упругого идеально пластического случая могут быть использованы для всех общих упругопластических контактных случаев.

Jackson и Green [41] (модель JG) расширили модель KE для учета геометрии и свойств материала в анализе с предположением об упругом идеально пластическом контакте. Для конечно-элементного анализа они использовали пять различных материалов с разными пределами текучести и показали заметно различное поведение материалов при переходе от упругопластического к полностью пластичной деформации. Для расчета критического перемещения в модели JG используется эмпирическое выражение, основанное на критерии пластичности Мизеса, и использует предел текучести материала непосредственно в своих выражениях. Расширяя за пределы упругого контакта модель отдельной неровности, основанную на конечно-элементном моделировании, авторы сформулировали новые эмпирические соотношения для расчета площади контакта и контактной нагрузки в отношении деформации. Они показали, что среднее контактное давление  $p$  не дости-

гает  $2,8S_y$  для большинства значений предела текучести. Их работа сосредоточивалась главным образом на включении предела текучести материала в анализ. О границе упругопластического режима и полностью пластического режима в их работе четко не сообщается. Модель JG описывается следующими выражениями:

критическое перемещение:

$$\omega_c = \left( \frac{\pi CS_y}{2E^*} \right)^2 R, \quad C = 1.295 \cdot \exp(0.736 \cdot \nu); \quad (7)$$

критическая сила контакта:

$$P_c = \frac{4}{3} \left( \frac{R}{E^*} \right)^2 \left( \frac{\pi CS_y}{2} \right)^3; \quad (8)$$

критическая площадь контакта:

$$A_c = \pi^3 \left( \frac{\pi CS_y R}{2E^*} \right)^2. \quad (9)$$

Нормализованные параметры:

$$\omega^* = \omega/\omega_c, \quad P^* = P/P_c, \quad A^* = A/A_c. \quad (10)$$

Для  $0 \leq \omega^* \leq 1.9 \cdot \omega$  действуют выражения для упругого контакта.

Для  $\omega_t^* \leq \omega^*$  в результате конечно-элементного моделирования получено:

$$A^* = \omega^* \left( \frac{\omega^*}{\omega_t^*} \right)^B, \quad B = 0.14 \cdot \exp(23 \cdot \varepsilon_y), \quad (11)$$

где  $\omega_t^* = 1.9 \cdot \omega_c$ ,  $\varepsilon_y = S_y/E^*$ ;

$$P_F^* = \left[ \exp\left(-\frac{1}{4}(\omega^*)^{5/12}\right) \right] (\omega^*)^{\frac{3}{2}} + \frac{4H}{CS_y} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{25}(\omega^*)^{\frac{5}{9}}\right) \right] \omega^*, \quad (12)$$

$$\frac{H}{S_y} = 2.84 \left[ 1 - \exp\left(-0.82 \left( \frac{\pi C e_y}{2} \sqrt{\omega^* \left( \frac{\omega^*}{\omega_t^*} \right)^{B/2}} \right)^{-0.7} \right) \right]. \quad (13)$$

Для описания процесса разгрузки контакта Etsion с соавт. [41] предложили следующие выражения:

для остаточного перемещения  $\omega_{res}$  (рис.):

$$\frac{\omega_{res}}{\omega_{max}} = \left( 1 - (\omega^*)^{-0.28} \right) \left( 1 - (\omega^*)^{-0.69} \right); \quad (14)$$

для силы и площади контакта при разгрузке:

$$P^* = \frac{P}{P_c} = P_{max}^* \left( \frac{\omega^* - \omega_{res}^*}{\omega_{max}^* - \omega_{res}^*} \right)^{n_p}, \quad (15)$$

$$A^* = \frac{A}{A_c} = A_{max}^* \left( \frac{\omega^* - \omega_{res}^*}{\omega_{max}^* - \omega_{res}^*} \right)^{n_a}, \quad (16)$$

где  $P_c$  и  $A_c$  определяются выражениями (6),

$$n_p = 1.5 \cdot (\omega_{max}^*)^{-0.0331}, \quad n_a = (\omega_{max}^*)^{-0.12}. \quad (17)$$

В работах [42], [43] V. Brizmer с соавт. рассматривали сплющивание сферы плоской поверхностью при полном скольжении и полном сцеплении. Ими получены следующие выражения для отношения критических перемещений и сил при сцеплении и скольжении:

$$\delta_c/\omega_c = 6.82\nu - 7.83 \cdot (\nu^2 + 0.0586), \quad (18)$$

$$L_c/P_c = 8.88\nu - 10.13 \cdot (\nu^2 + 0.089), \quad (19)$$

где  $\omega_c$  и  $P_c$  определяются выражениями (7) и (8), для которых  $C = 1.234 + 1.256\nu$ .

Для площади и силы контакта авторами [43] предложено:

$$A^* = \omega^* \left( 1 + \exp\left( \frac{1}{1 - (\omega^*)^\alpha} \right) \right), \quad (20)$$

$$P^* = (\omega^*)^{3/2} \left( 1 - \exp\left( \frac{1}{1 - (\omega^*)^\beta} \right) \right), \quad (21)$$

$$\alpha = 0.25 + 0.125\nu, \quad \beta = 0.174 + 0.08\nu. \quad (22)$$

Чтобы оценить безразмерное перемещение  $\omega^*$ , при котором контакт переходит из упругопластического состояния в полностью пластическое для разных соотношений  $S_y/E$  и  $E_t$ , авторы [44] на основе результатов конечно-элементного моделирования получили новые эмпирические выражения для  $S_y/E < 0.006$ :

$$\omega^* = 6 \cdot 10^6 \cdot (S_y/E)^2 - 56167 \cdot (S_y/E) + 216.22, \quad E_t = 0.025E; \quad (23)$$

$$\omega^* = 2 \cdot 10^6 \cdot (S_y/E)^2 - 24525 \cdot (S_y/E) + 119.25, \quad E_t = 0.05E; \quad (24)$$

$$\omega^* = 1 \cdot 10^6 \cdot (S_y/E)^2 - 15178 \cdot (S_y/E) + 80.965, \quad E_t = 0.1E. \quad (25)$$

Для  $\omega^* > 10$  сила и площадь контакта могут быть оценены с помощью следующих уравнений:

$$P/P_c = 1.455 \cdot (\omega^*)^{1.2576}, \quad A/A_c = 1.0442 \cdot (\omega^*)^{1.1206}, \quad E_t = 0.025E; \quad (26)$$

$$P/P_c = 1.3835 \cdot (\omega^*)^{1.2811}, \quad A/A_c = 1.0604 \cdot (\omega^*)^{1.1091}, \quad E_t = 0.05E; \quad (27)$$

$$\begin{aligned} P/P_c &= 1.2908 \cdot (\omega^*)^{1.3166}, \\ A/A_c &= 1.0043 \cdot (\omega^*)^{1.104}, \quad E_t = 0.1E. \end{aligned} \quad (28)$$

Для  $1 \leq \omega^* \leq 10$  сила и площадь контакта оцениваются выражениями (4).

Позже, в 2012 г., Brake [45] разработал новую аналитическую модель, в которой контакт разделен на три фазы: полностью упругая, упругопластическая и полностью пластическая фаза. Полностью упругая фаза следует теории Герца, а полностью пластическая — следует теории Джонсона [46]. Для упругопластической фазы Brake использовал полиномиальную интерполяцию 3-го порядка между полностью упругой и полностью пластической фазами, чтобы найти силу и площадь контакта в упругопластической фазе. Кубические полиномы Эрмита были выбраны для удобства, так как аналогичный подход использовался в работе [47] для обеспечения непрерывности силы в смешанном упругопластическом режиме. В более поздней работе [48] Brake использовал ту же методологию с другими функциями перехода от упругого к пластическому контакту. Для силы контакта в смешанном режиме было предложено:

$$F = \phi_1(\delta) \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2} + \phi_2(\delta) p \pi \frac{a^m}{a_p^{m-2}}, \quad (29)$$

$$a = \sqrt{R\delta(1 + \phi_2(\delta))}, \quad (30)$$

$$\phi_1(\delta) = \operatorname{sech}\left( (1+n) \frac{\delta - \delta_y}{\delta_p - \delta_y} \right), \quad (31a)$$

$$\phi_2(\delta) = \operatorname{sech}\left( (1-n) \frac{\delta - \delta_y}{\delta_p - \delta_y} \right), \quad (31b)$$

где  $n$  — экспонента упрочнения,  $n = m - 2$ ;  $m$  — индекс Майера;  $\delta_y$  и  $\delta_p$  — границы упругопластической области.

В статье не указывается, предназначена ли модель для вдавливания или сплющивания контактов, однако в полностью пластической фазе используется индекс Мейера, который предназначен исключительно для вдавливания контактов. Эта модель показывает улучшение по сравнению с предыдущей, представленной Brake [44].

Дальнейшему развитию модели упругопластического контакта в плане учета деформационного упрочнения способствовала работа [49]. В области упругопластических деформаций использовался степенной закон упрочнения. Авторами получены зависимости, аналогичные модели KE (выражения (4) и (5)), для упругопластического упрочняемого материала:

$$\frac{P}{P_c} = B_i \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{\gamma_i}, \quad \frac{A}{A_c} = C_i \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{\lambda_i}, \quad (32)$$

где  $B_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $C_i$ ,  $\lambda_i$  — параметры для разных диапазонов значений  $\omega/\omega_c$ , которые зависят от экспоненты упрочнения  $n$ ; используемые в [49] значения критических  $\omega_c$ ,  $P_c$  и  $A_c$  соответствуют модели KE.

Значения параметров, входящих в выражение (32), определяются выражениями:

для силы контакта:

$$B_1 = B_1(n) = -0.07598n + 0.96081,$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(n) = 0.10725n + 1.43352, \quad \text{для } 1 \leq \omega/\omega_c \leq 6;$$

$$B_2 = B_2(n) = -0.82815n + 1.68998,$$

$$\gamma_2 = \gamma_2(n) = 0.31831n + 1.21111, \quad \text{для } 6 \leq \bar{h}/\bar{h}_y \leq 110;$$

для площади контакта:

$$C_1 = C_1(n) = -0.01763n + 1.13173,$$

$$\lambda_1 = \lambda_1(n) = 0.04715n + 1.03997, \quad \text{для } 1 \leq \omega/\omega_c \leq 6;$$

$$C_2 = C_2(n) = 0.23235n + 0.94066,$$

$$\lambda_2 = \lambda_2(n) = 0.18325n + 1.14559, \quad \text{для } 6 \leq \omega/\omega_c \leq 110.$$

Авторы [49] отмечают, что при  $110 < \omega/\omega_c$  указанные зависимости носят нелинейный характер, однако они не приводятся.

Для определения  $\omega_{res}/\omega_{max}$  путем использования результатов конечных элементов предложено эмпирическое выражение, основанное на изменении аналогичного выражения (14):

$$\frac{\omega_{res}}{\omega_{max}} = \left( 1 - (\omega^*)^{-d} \right)^2, \quad (33)$$

где  $d = d(n) = -0.22471n^2 - 0.17406n + 0.39877$ .

При разгрузке сила и площадь контакта определяются выражениями (15) и (16), где:

$$n_p = 1.5 \cdot (\omega_{max}^*)^{e_p}, \quad n_a = (\omega_{max}^*)^{e_a}; \quad (34)$$

$$e_p = e_p(n) = 0.07071n^2 - 0.0411n - 0.02955, \quad (35a)$$

$$e_a = e_a(n) = 0.17732n^2 - 0.02156n - 0.14938. \quad (35b)$$

Аналогичная задача по учету деформационного упрочнения для условия сцепления в контакте решена в работе [50]. Для силы и площади контакта используются выражения (20) и (21), полученные авторами [43]. В результате конечно-элементного моделирования для параметров  $\alpha$  и  $\beta$  предложено:

$$\alpha = \alpha(n, v) = 0.179n^2 - 0.420n + 0.184v + 0.243, \quad (36)$$

$$\beta = \beta(n, v) = -0.159n + 0.0731v + 0.183. \quad (37)$$

Остаточное перемещение определяется выражением (33), где:

$$d = d(n, v) = -0.114n^2 - 0.237n + 0.219v + 0.331. \quad (38)$$

При разгрузке сила и площадь контакта, как и в предыдущем случае, определяются выражениями (15), (16) и (34), где:

$$e_p = e_p(n, v) =$$

$$= 0.0519n^2 + 0.0705nv - 0.0401n - 0.0718v - 0.00596, \quad (39)$$

$$e_a = e_a(n, v) = 0.240n^2 - 0.037n + 0.0382v - 0.195. \quad (40)$$

Выражения, приведенные в работе [50], определены для  $0 \leq n \leq 1$  и  $1 < \omega^*$ .

Эффект билинейного деформационного упрочнения был детально изучен в недавней работе [51]. Авторы пытались устранить два пробела в этой теме: во-первых, учесть изменения тангенциального модуля упругости от  $E_t = 0$  до  $E_t = E_s$  для того, чтобы с большей точностью зафиксировать физическое поведение материала. Во-вторых, учесть влияние деформаций на плоскости на площадь контакта и силу контакта. В результате исследований получено для радиуса контакта:

$$a = a_e + (a_p - a_e) \exp\left(\gamma \left(\frac{E_t}{E_s}, \frac{\Delta}{R}\right)\right), \quad (41)$$

где в соответствии с результатами конечно-элементного моделирования:

$$\gamma \left(\frac{E_t}{E_s}, \frac{\Delta}{R}\right) = \frac{2\sqrt{E_s/S_{ys}}(E_t/E_s)^{1-(\Delta/R)}}{(4 - 3\exp(-2\sqrt{E_s/E_s}(E_t/E_s)))(1 - \Delta/R)}, \quad (42)$$

$a_e$  и  $a_p$  — границы радиусов упругопластического контакта, определяемые из теории Герца и модели JG;  $\Delta$  и  $R$  — полное нормальное смещение контактирующих тел и радиус сферы;  $E_s$  — модуль упругости сферы.

Для силы контакта:

$$F = F_p + (F_e - F_p)(1 - \exp(-3.3E_t/E_s)), \quad (43)$$

где:

$$F_p = F_c \left[ \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\delta_c}\right)^{5/12}\right) \left(\frac{\Delta}{\delta_c}\right)^{3/2} + \frac{4H}{CS_{ys}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{25}\left(\frac{\Delta}{\delta_c}\right)^5\right) \right] \frac{\Delta}{\delta_c} \right], \quad (44)$$

$$\frac{H}{S_{ys}} = 2.84 - 0.92 \left( 1 - \cos\left(\pi \frac{a}{R}\right) \right), \quad (45)$$

$F_e$  и  $F_c$  — определяются согласно теории Герца.

Как отмечают авторы [51], эффектом деформационного упрочнения при сплющивании сферы даже для очень малых касательных модулей, таких как  $E_t = 0.01E_s$ , нельзя пренебрегать, вопреки выводам работы [38].

Отдельно следует отметить упоминаемую во введении работу [29], в которой авторы показали, что разница между моделями сплющивания и вдавливания может составлять 25 % и что между случаями сплющивания и вдавливания существует переходная фаза. Для изучения контактирования сферы и плоскости авторы ввели коэффициент текучести  $S_y^* = S_{ys}/S_{yf}$ , где  $S_{ys}$  и

$S_{yf}$  — пределы текучести материалов сферы и плоскости соответственно. В идеале для  $S_y^* \leq 1$  задача ближе к случаю сплющивания, в котором сфера является более слабым объектом, а для  $S_y^* \geq 1$  задача ближе к случаю вдавливания. Однако авторы наблюдали, что переход между этими двумя фазами происходит при  $S_y^* = 1.07$  вместо  $S_y^* = 1$ . Представим процесс контактирования сферы и плоскости более подробно.

Приложенное смещение  $\Delta$  составляет деформацию сферы  $\delta_s$  и деформацию плоскости  $\delta_f$  так, что  $\Delta = \delta_s + \delta_f$ . Нормализованные параметры были определены как:

$$\Delta' = \Delta/R, \quad \delta_s^* = \delta_s/\Delta, \quad \delta_f^* = 1 - \delta_s^*. \quad (46)$$

В результате конечно-элементного моделирования были предложены выражения для вычисления  $\delta_s^* = \delta_s^*(\Delta', E^*, S_y^*, S_{y \min})$  для трех диапазонов:  $S_y^* \leq 1$ ,  $1 < S_y^* \leq 1.53$  и  $1.53 < S_y^*$ .

Измененный в процессе контактирования радиус кривизны  $R'$  определяется выражением:

$$\frac{R'}{R} = 1 + \delta_{s|f}^* - \Delta' \delta_{s|f}^*. \quad (47)$$

Радиус контакта был определен в зависимости от  $S_y^*$  и  $\delta_n = \delta_s/\delta_c$ , где  $\delta_c$  определяют согласно уравнению (7).

Для  $S_y^* \leq 1.07$ :

$$\delta_n = \delta_s/\Delta, \quad \frac{R'}{R} = 1 + \delta_f^* - \Delta' \delta_{s|f}^*; \quad (48)$$

$$a = \sqrt{R' \delta_s}, \quad \delta_n \leq 3.7; \quad (49)$$

$$a = R' \left( \frac{\pi C S_{ys}}{2 E^*} \right)^2 \left[ \delta_n \left( \frac{\delta_n}{1.9} \right)^B \right] \chi_{11}, \quad 3.7 < \delta_n \leq 408; \quad (50)$$

$$a = R' \left( \frac{\pi C S_{ys}}{2 E^*} \right)^2 \left[ \delta_n \left( \frac{\delta_n}{1.9} \right)^B \right] \chi_{12}, \quad \delta_n > 408, \quad (51)$$

где  $B = B(S_{ys}, E^*)$  определяется выражением (11),  $\chi_{11} = \chi_{11}(\delta_n, S_y^*)$  и  $\chi_{12} = \chi_{12}(\delta_n, S_y^*)$  [29].

Для  $S_y^* > 1.07$ :

$$\delta_n = \delta_f/\Delta, \quad \frac{R'}{R} = 1 + \delta_s^* - \Delta' \delta_{s|f}^*; \quad (52)$$

$$a = \sqrt{R' \delta_f}, \quad \delta_n \leq 3.7; \quad (53)$$

$$a = R' \left( \frac{\pi C S_{ys}}{2 E^*} \right)^2 \left[ \delta_n \left( \frac{\delta_n}{1.9} \right)^B \right] \chi_{21}, \quad 3.7 < \delta_n \leq 408; \quad (54)$$

$$a = R' \left( \frac{\pi C S_{ys}}{2E^*} \right)^2 \left[ \delta_n \left( \frac{\delta_n}{1.9} \right)^B \right] \chi_{22}, \delta_n > 408, \quad (55)$$

где  $\chi_{21} = \chi_{21}(\delta_n, S_y^*)$  и  $\chi_{22} = \chi_{22}(\delta_n, S_y^*)$  [29].

Согласно [29], среднее нормальное давление (твердость для полностью пластического режима) имеет переход от сплющивания к фазе вдавливания. Для каждой фазы твердость является функцией от  $a/R$  и была сформулирована как:

$$H = \frac{H_i - H_f}{\pi} \left[ \tan^{-1} \left( 300 \log(S_y^* - 0.06) + \frac{\pi}{2} \right) \right] + H_f, \quad (56)$$

где  $H_f$  — твердость при сплющивании, определяется выражением (45);  $H_i$  — твердость при индентировании, определяется согласно [52]:

$$H_i = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left( \frac{a}{R} \right)^{-2} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{a}{R} \right)^3 - \left( 1 - \cos^{-1} \left( \frac{a}{R} \right) \right) \cdot \left( 1 - \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right)^{3/2} - \frac{a}{R} + \frac{\pi}{2} + 1 \right]. \quad (57)$$

Сила контакта была окончательно сформулирована как:

$$F = W_e F_{es} + W_p F_p, \quad S_y^* \leq 1.07; \quad (58)$$

$$F = W_e F_{ef} + W_p F_p, \quad S_y^* \leq 1.07, \quad (59)$$

где упругие силы определяются согласно теории Герца. Пластическая сила  $F_p = \pi a^2 H$ , весовые коэффициенты определяются выражениями:

$$W_e = \exp(-1.6(\delta_n - 1.9))^{0.16},$$

$$W_p = 0.95 - \exp(-0.58\delta_n)^{0.3}, \quad S_y^* \leq 1.07; \quad (60)$$

$$W_e = \exp(-1.7(\delta_n - 1.9))^{0.26},$$

$$W_p = 1 - \exp(-0.465\delta_n)^{0.45}, \quad S_y^* > 1.07. \quad (61)$$

Следует отметить, что в вышеприведенных работах по обзору моделей сплющивания только в работе [48] есть сравнение разных моделей с результатами экспериментов по сплющиванию сферы, представленными в работе [53] для безразмерного смещения  $\delta^* \leq 12\,000$ . Как следует из [48, fig. 11 a, b], наилучшее соответствие с экспериментом [53] имеет модель, представленная авторами [48], хотя изначально не указывается, предназначена ли модель для вдавливания или сплющивания сферы. При описании полностью пластического контакта в [48] используется закон Майера, который предназначен исключительно для вдавливания сферы. Другие модели сплющивания значительно отличаются от экспериментальных данных. Таким образом, если считать предложенную модель контакта в [48] для описания внедрения сферы, то можно утвер-

ждать, что отсутствуют модели, адекватно описывающие процесс сплющивания.

В работе [54] имеет место обратное событие — при конечно-элементном моделировании процесса внедрения сферы при ударе наилучшие результаты при сравнении имеет модифицированная модель JG для сплющивания сферы.

#### Заключение.

1. Герметичность неподвижных уплотнительных соединений обеспечивается нагружением их усилием, или контактными давлениями герметизации. Для оценки герметизирующей способности уплотнительного стыка используется безразмерный функционал проницаемости, который определяется относительной площадью контакта, плотностью зазоров в стыке и вероятностью протекания среды, которая зависит от слияния отдельных пятен контакта. Учитывая подход авторов [12; 13] к определению указанных характеристик, можно утверждать, что для решения задач герметологии необходимо знать площадь контакта отдельной неровности и распределения на ней контактного давления, влияющего на объем зазоров, приходящийся на отдельную неровность.

Упомянутым во введении моделям шероховатости WG и KD свойственны недостатки, связанные с ограничениями закона распределения неровностей и распределения материала по высоте шероховатого слоя. Поэтому для практического использования рекомендуется более универсальная модель ОК [12; 13].

2. Большинство моделей сплющивания, особенно более ранних, предполагают, что деформация является упругой идеально пластической, поэтому в материале не происходит упрочнения. Однако даже для этого упрощенного случая отсутствуют точные общие решения упругопластического контакта деформируемой сферы и жесткой плоскости.

3. Одна из проблем экспериментальных исследований упругопластического поведения заключается в том, что переход от упругого к полностью развитому пластическому течению происходит при перемещении менее чем на  $mкм$  для типичных конструкционных материалов. Так, например, для материалов с  $\varepsilon_y = 0.001...0.005$  критическое относительное перемещение  $\delta_c/R = 0.00000644...0.000161$ . При радиусе сферы  $R = 1\,мм = 1000\,мкм$  критическое перемещение равно  $\delta_c = 0.00644...0.161\,мкм$ . На самом деле, радиусы сферических неровностей менее  $1000\,мкм$ . Поэтому экспериментальные исследования следует проводить на макромоделях неровностей.

Из-за небольших значений критического перемещения при определении контактных характеристик для упрочняемых материалов следует рассматривать только упругопластический контакт.

4. Как следует из приведенного обзора, обобщенное эмпирическое выражение для расчета контактной нагрузки и контактной площади, основанное на допущении об упругом идеально пластичном контакте, не дает требуемого решения для материалов, обладающих характеристиками деформационного упрочнения.

В зарубежной литературе при описании упруго-пластического упрочняемого материала широко используется степенной закон Холломоны (*Hollomon's power law*), который, в частности, использовался для конечно-элементного моделирования при описании внедрения жесткой сферы в упругопластическое полупространство [55; 56]. Значения экспоненты можно определить по параметрам условной диаграммы растяжения — пределу текучести и пределу прочности [12, с. 210].

В вышеприведенном обзоре степенной закон упрочнения использовался в работе [49] для условия скольжения в контакте и в работе [50] для условия сцепления. В [49] за основу была взята модель КЕ, в работе [50] — модель авторов [43], причем модернизация модели КЕ авторами произведена для  $\omega/\omega_c \leq 110$ , для других значений  $\omega/\omega_c$  данные отсутствуют.

В работах [43; 51] детально исследовался эффект билинейного деформационного упрочнения, в котором  $E_t = kE_s$ , где  $0 < k \leq 1$ , однако не указывается, как связать  $k$  с параметрами свойств материалов.

При сравнении моделей сплющивания с экспериментальными данными в работе [48] не рассматривались модели, учитывающие деформационное упрочнение. Это является возможной причиной несоответствия рассматриваемых моделей экспериментальным данным.

5. При конечно-элементном моделировании сплющивания неровности используется полусфера. Однако таких неровностей, у которых высота равна радиусу, не бывает, так как средний угол наклона у неровностей — несколько градусов, а максимальный угол наклона поверхности у полусферы равен  $90^\circ$ . Поэтому представим отдельную неровность в виде сферического сегмента с диаметром основания  $2a$ , который находится на цилиндрическом основании. При этом основание будет действовать как полубесконечное твердое тело, когда его высота превысит  $6a$  [57]. В таком случае корректное использование результатов конечно-элементного анализа возможно для  $a/R < 0.17$ .

6. Как упоминалось в п. 1, для определения плотности зазоров необходимо знать распределение давления на площадке контакта. Если для моделей внедрения эта задача решена [12; 31], то для моделей сплющивания данный вопрос рассмотрен только в работе [43] без каких-либо обобщений.

7. Большим достижением в развитии и совершенствовании моделей сплющивания являются результаты работы [29], в которой авторы использовали новую переменную — коэффициент текучести  $S_y^*$  для формулирования перехода между двумя ограничивающими моделями сплющивания и внедрения. Получены феноменологические уравнения для деформации обоих тел, радиуса контакта, силы контакта и среднего давления (твердости), которые являются более общими, чем для отдельных моделей вдавливания и сплющивания. К сожалению, эти вопросы рассмотрены без учета деформационного упрочнения.

8. Иной подход для описания процессов сплющивания и внедрения сферы предлагают ученые Волгоград-

ской школы контактной механики [58; 59], которые используют понятие пластической твердости как меры сопротивления упругопластической деформации. Упругопластический контакт рассматривается как повторный упругий, поэтому в выражение для упругой деформации вносится величина остаточной пластической деформации. При близких твердостях контактирующих тел определяется приведенная пластическая твердость.

#### Литература

- Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. Lond. Ser. 1966. V. A295. P. 300–319.
- Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностр. 1977. 526 с.
- Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей // М.: Наука. 1970. 227 с.
- Огар П.М., Корсак И.И. Влияние характеристик тяжело нагруженного стыка шероховатых уплотнительных поверхностей на герметичность. Братск: БрИИ, 1989. 110 с. Деп. в ВИНТИ 05.12.1990, № 6109-B90.
- Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: single asperity contact // Applied mechanics reviews. 1996. V. 49. P. 275–298.
- Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: multiple asperity contact // Tribology letters. 1998. V. 4(1). P. 1–35.
- Chung J.C. The Elliptical Elastic-Plastic Microcontact Analysis // New Tribological Ways. 2011. P. 165–196.
- Wang Z., Liu X. Model for Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces // ASME: Journal of Tribology. 2018. V. 140. 051402.
- Wang D., Zhang Z., Jin F., Fan X. Normal Contact Model for Elastic and Plastic Mechanics of Rough Surfaces // Acta Mech. Solida Sin. 2019. V. 32. P. 148–159.
- Polycarpou A.A., Etsion I. A Model for the Static Sealing Performance of Compliant Metallic Gas Seals Including Surface Roughness and Rarefaction Effects // Tribology transactions. 2000. V. 43 (2). P. 237–244.
- Bottiglione F., Carbone G., Mangialardi L., Mantriota G. Leakage mechanism in flat seals // Journal of Applied Physics. 2009. V. 106(10). 104902.
- Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Братск: Изд-во БрГУ, 2017. 242 с.
- Ogar P., Belokobylsky S., Gorokhov D. Contact mechanics of rough surfaces in hermetic sealing study / ch. in: Contact and Fracture Mechanics. London: InTechOpen Lim., 2018. P. 3–25.
- Zhang Q., Chen X., Huang Y., Chen Y. Fractal modeling of fluidic leakage through metal sealing surfaces // AIP Advances. 2018. V. 8, 045310
- Cao Y.P., Lu J. A new method to extract the plastic properties of metal materials from an instrumented spherical indentation loading curve // Acta Materialia. 2004. V. 52. P. 4023–4032.
- Xu B., Chen X. Determining engineering stress-strain curve directly from the load-depth curve of spherical indentation test // Journal of Materials Research. 2010. V. 25. P. 2297–2307.
- Haušild P., Materna A., Nohava J. On the identification of stress-strain relation by instrumented indentation with spherical indenter // Materials & Design. 2012. V. 37. P. 373–378.
- Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B. The correction factor in elastic modulus determining by indentation // Advanced Materials Research. 2014. V. 887–888. P. 997–1000.
- Ogar P., Kushnarev V., Kobzova I. Energy approach to determine mechanical properties of materials from the kinetic diagram of spherical indentation // Materials Today: Proceedings. 2019. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.07.684>.

20. Матлин М.М., Мозгунова А.И., Лебский С.Л. Прогнозирование параметров упрочнения деталей машин путем поверхностного пластического деформирования // Известия ВолГТУ. 2005. № 3. С. 52–55.
21. Матлин М.М., Мосейко В.О., Мосейко В.В. Механика силового контактного взаимодействия дробы с поверхностью упрочняемой детали // Упрочняющие технологии и покрытия. 2006. № 10(22). С. 45–52.
22. Ghaednia H., Marghitu D.B., Jackson R.L. Predicting the permanent deformation after the impact of a rod with a flat surface // Journal of Tribology. 2015. V. 137 (1). p. 011403.
23. Ghaednia H., Cermik O., Marghitu D.B. Experimental and theoretical analysis of the elasto-plastic oblique impact of a rod with a flat // Int. J. of Impact Eng. 2015. V. 86. P. 307–317.
24. Измайлов В.В., Новоселова М.В. Контакт твердых тел и его проводимость. Тверь: ТГТУ, 2010. 110 с.
25. Ghaednia H., Jackson R.L., Gao J. A third body contact model for particle contaminated electrical contacts // IEEE 60th Holm Conference on Electrical Contacts (Holm). 2014. P. 1–5
26. Fieberg C., Kneer R. Determination of thermal contact resistance from transient temperature measurements // Inter. J. Heat and Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 1017–1023.
27. Luo X., Feng H., Liu J., Liu M., Liu S. An experimental investigation on thermal contact resistance across metal contact interfaces // International Conference on Electronic Packaging Technology & High Density Packaging. 2011. P. 733–738.
28. Jackson R.L., Ghaednia H., Elkady Y.A., Bhavnani S.H., Knight R.W. A closedform multiscale thermal contact resistance model // IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology. 2012. V. 2(7). P. 1158–1171.
29. Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghitu D. B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // Tribology International. 2016. V. 93. P. 78–90.
30. Ghaednia H., Wang X., Saha S., Xu Y., Sharma A., Jackson R.L. A Review of Elastic–Plastic Contact Mechanics // Applied Mechanics Reviews. 2017, V. 69. 060804
31. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // Adv. Mat. Research. 2013. V. 664. P. 625–631.
32. Hertz H. Über die berührung fester elastischer körper // J. Reine Angew. Math. 1882. V. 92. P. 156–171.
33. Jackson R.L., Kogut L. A comparison of flattening and indentation approaches for contact mechanics modeling of single asperity contacts // J. Tribology. 2006. V. 128 (1) P. 209–212.
34. Chang W.R., Etsion I., Bogy D.B. An Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces // ASME J. Tribol. 1987. V. 109. P. 257–263.
35. Evseev D.G., Medvedev B.M., Grigoriyan G.G. Modification of the Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces // Wear. 1991. V. 150. P. 79–88.
36. Chang W.R. An Elastic-Plastic Contact Model for a Rough Surface With an Ion-Plated Soft Metallic Coating // Wear. 1997. V. 212. P. 229–237.
37. Zhao Y., Maietta D.M., Chang L. An Asperity Microcontact Model Incorporating the Transition From Elastic Deformation to Fully Plastic Flow // ASME J. Tribol. 2000. V. 122. P. 86–93.
38. Kogut L., Etsion I. Elastic–plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat // J. Appl. Mech. 2002. V. 69. P. 657–662.
39. Tabor D. The Hardness of Metals. Clarendon Press. Oxford. 1951. 188 p.
40. Chang W.R., Etsion I., Bogy D.B. Static Friction Coefficient Model for Metallic Rough Surfaces // ASME J. Tribol. 1988. V. 110. PP. 57–63.
41. Etsion I., Kligerman Y., Kadin Y. Unloading of an Elastic-Plastic Loaded Spherical Contact // Int. J. Solids Struct. 2005. V. 42(13). P. 3716–3729.
42. Brizmer V., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on the elasticity terminus of a spherical contact // Int. J. Solids Struct. 2006. V. 43:18–19. P. 5736–5749.
43. Brizmer V., Zait Y., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on elastic-plastic spherical contact // J. Mech. of Mater. Struct. 2006. V. 1 (5). P. 865–879.
44. Shankar S., Mayuram M. Effect of strain hardening in elastic-plastic transition behavior in a hemisphere in contact with a rigid flat // Int. J. Solid Structures. 2008. V. 45. P. 3009–3020.
45. Brake M. An analytical elastic-perfectly plastic contact model // Int. J. Solid Structures. 2012. V. 49. P. 3129–3141.
46. Johnson K. Contact mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 154–179.
47. Zhao Y., Maietta D.M., Chang L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow // ASME J. of Tribology. 2000. V. 122. P. 86–93.
48. Brake M. An analytical elastic plastic contact model with strain hardening and frictional effects for normal and oblique impacts // Int. J. Solids and Structures. 2015. V. 62 PP. 104–123.
49. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and unloading of a spherical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // Int. J. of Mech. Sciences. 2012. V. 56. P. 70–76.
50. Zhao B., Zhang S., Wang Q., Zhang Q., Wang P. Loading and unloading of a power-law hardening spherical contact under stick contact condition // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. V. 94. P. 20–26.
51. Ghaednia H., Brake M.R. W., Berryhill M., Jackson R. L. Strain hardening from elastic–perfectly plastic to perfectly elastic flattening single asperity contact // ASME. J. Tribol. 2019. V. 141(3) 031402.
52. Jackson R.L., Ghaednia H., Pope S. A solution of rigid–perfectly plastic deep spherical indentation based on slip-line theory // Tribol. Lett. 2015. V. 58(3). P. 1–7.
53. Jamari J., Schipper D.J. Experimental investigation of fully plastic contact of a sphere against a hard flat // ASME Journal of Tribology. 2006. V. 128. P. 230–235.
54. Ghaednia H., Marghitu D.B., Jackson R.L. Predicting the permanent deformation after the impact of a rod with a flat surface // Journal of Tribology. 2015. V. 137 (1). P. 011403.
55. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R. Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // Int. J. Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136–4153.
56. Bartier O., Hernot X., Mauvoisin G. Theoretical and experimental analysis of contact radius for spherical indentation // Mechanics of Materials. 2010. V. 42 (5). P. 640–656.
57. Saha S., Jackson R.L. Elastic and elastic-perfectly plastic analysis of an axisymmetric sinusoidal surface asperity contact // Tribology — Materials, Surfaces & Interfaces. 2019. DOI: 10.1080/17515831.2019.1663396
58. Matlin M.M., Kazankina E.N., Kazankin V.A. Calculation of the actual contact area between a single microasperity and the smooth surface of a part when the hardnesses of their materials are similar // J. of Friction and Wear. 2011. V. 32(2). P. 140–144.
59. Матлин М.М., Мозгунова А.И., Казанкина Е.Н., Казанкин В.А. Жесткость упругопластического контакта деталей машин. М.: Машиностроение, 2015. 217 с.

#### References

- Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. Lond. Ser. 1966. Vol. A295. P. 300–319.
- Kragel'skij I.V., Dobychin M.N., Kombatov V.S. Basics of friction and wear calculations. M.: Mashinostroenie, 1977. 526 p.
- Demkin N.B. Contacting rough surfaces. M.: Nauka, 1970. 227 p.
- Ogar P.M., Korsak I.I. The influence of the characteristics of a heavily loaded joint of rough sealing surfaces on tightness. Bratsk: BrII, 1989. 110 p. Dep. v VINITI 05.12.1990, № 6109-V90.

5. Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: single asperity contact // *Applied mechanics reviews*. 1996. Vol. 49. P. 275–298.
6. Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: multiple asperity contact // *Tribology letters*. 1998. Vol. 4 (1). P. 1–35.
7. Chung J.C. The Elliptical Elastic-Plastic Microcontact Analysis // *New Tribological Ways*. 2011. P. 165–196. doi: 10.5772/15612
8. Wang Z., Liu X. Model for Elastic–Plastic Contact Between Rough Surfaces // *ASME: Journal of Tribology*. 2018. Vol. 140. P. 051402.
9. Wang D., Zhang Z., Jin F., Fan X. Normal Contact Model for Elastic and Plastic Mechanics of Rough Surfaces // *Acta Mech. Solida Sin.* 2019. Vol. 32. P. 148–159. <https://doi.org/10.1007/s10338-018-0066-y>
10. Polycarpou A.A., Etsion I.A. Model for the Static Sealing Performance of Compliant Metallic Gas Seals Including Surface Roughness and Rarefaction Effects // *Tribology transactions*. 2000. Vol. 43(2). P. 237–244.
11. Bottiglione F., Carbone G., Mangialardi L., Mantriota G. Leakage mechanism in flat seals // *Journal of Applied Physics*. 2009. Vol. 106 (10). P. 104902. <https://doi.org/10.1063/1.3254187>
12. Ogar P.M., Gorohov D.B., Kozhevnikov A.S. Contact tasks in hermetic sealing studies of fixed joints. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2017. 242 p.
13. Ogar P., Belokobylsky S., Gorokhov D. Contact mechanics of rough surfaces in hermetic sealing study // *Contact and Fracture Mechanics*. London: In Tech Open Limited, 2018. P. 3–25.
14. Zhang Q., Chen X., Huang Y., Chen Y. Fractal modeling of fluidic leakage through metal sealing surfaces // *AIP Advances*. 2018. Vol. 8. P. 045310. <https://doi.org/10.1063/1.5023708>
15. Cao Y.P., Lu J. A new method to extract the plastic properties of metal materials from an instrumented spherical indentation loading curve // *Acta Materialia*. 2004. Vol. 52. P. 4023–4032.
16. Xu B., Chen X. Determining engineering stress–strain curve directly from the load–depth curve of spherical indentation test // *Journal of Materials Research*. 2010. Vol. 25. P. 2297–2307.
17. Haušild P., Materna A., Nohava J. On the identification of stress–strain relation by instrumented indentation with spherical indenter // *Materials & Design*. 2012. Vol. 37. P. 373–378.
18. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B. The correction factor in elastic modulus determining by indentation // *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 887–888. P. 997–1000.
19. Ogar P., Kushnarev V., Kobzova I. Energy approach to determine mechanical properties of materials from the kinetic diagram of spherical indentation // *Materials Today: Proceedings*. 2019. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.07.684>. (v pechati)
20. Matlin M.M., Mozgunova A.I., Lebskij S.L. Prediction of the hardening parameters of machine parts by surface plastic deformation // *Izvestia VSTU*. 2005. № 3. P. 52–55.
21. Matlin M.M., Mosejko V.O., Mosejko V.V. The mechanics of the force contact interaction of a fraction with the surface of a hardened part // *Uprochnyayushchie tekhnologii i pokrytiya*. 2006. № 10 (22). P. 45–52.
22. Ghaednia H., Marghitu D.B., Jackson R.L. Predicting the permanent deformation after the impact of a rod with a flat surface // *Journal of Tribology*. 2015. Vol. 137 (1). P. 011403.
23. Ghaednia H., Cermik O., Marghitu D.B. Experimental and theoretical analysis of the elasto-plastic oblique impact of a rod with a flat // *International Journal of Impact Engineering*. 2015. Vol. 86. P. 307–317.
24. Izmajlov V.V., Novoselova M.V. Contact of solids and its conductivity. Tver': TGTU, 2010. 110 p.
25. Ghaednia H., Jackson R.L., Gao J. A third body contact model for particle contaminated electrical contacts // *IEEE 60th Holm Conference on Electrical Contacts (Holm)*. 2014. P. 1–5.
26. Fieberg C., Kneer R. Determination of thermal contact resistance from transient temperature measurements // *Inter. J. Heat and Mass Transfer*. 2008. Vol. 51. P. 1017–1023.
27. Luo X., Feng H., Liu J., Liu M., Liu S. An experimental investigation on thermal contact resistance across metal contact interfaces // *International Conference on Electronic Packaging Technology & High Density Packaging*, 2011. P. 733–738.
28. Jackson R.L., Ghaednia H., Elkady Y.A., Bhavnani S.H., Knight R.W. A closedform multiscale thermal contact resistance model // *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*. 2012. Vol. 2(7). P. 1158–1171.
29. Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghitu D.B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // *Tribology International*. 2016. Vol. 93. P. 78–90.
30. Ghaednia H., Wang X., Saha S., Xu Y., Sharma A., Jackson R.L. A Review of Elastic–Plastic Contact Mechanics // *Applied Mechanics Reviews*. 2017. Vol. 69. P. 060804.
31. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // *Advanced Materials Research*. 2013. Vol. 664. P. 625–631.
32. Hertz H. Über die berührung fester elastischer körper // *J. Reine Angew. Math.* 1882. Vol. 92. P. 156–171.
33. Jackson R.L., Kogut L. A comparison of flattening and indentation approaches for contact mechanics modeling of single asperity contacts // *Journal of tribology*. 2006. Vol. 128 (1). P. 209–212.
34. Chang W.R., Etsion I., Bogy D.B. An Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces // *ASME J. Tribol.* 1987. Vol. 109. P. 257–263.
35. Evseev D.G., Medvedev B.M., Grigoriyan G.G. Modification of the Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces // *Wear*. 1991. Vol. 150. P. 79–88.
36. Chang W.R. An Elastic-Plastic Contact Model for a Rough Surface With an Ion-Plated Soft Metallic Coating // *Wear*. 1997. Vol. 212. P. 229–237.
37. Zhao Y., Maietta D.M., Chang L. An Asperity Microcontact Model Incorporating the Transition From Elastic Deformation to Fully Plastic Flow // *ASME J. Tribol.* 2000. Vol. 122. P. 86–93.
38. Kogut L., Etsion I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat // *J. Appl. Mech.* 2002. Vol. 69. P. 657–662.
39. Tabor D. *The Hardness of Metals*. Clarendon Press. Oxford. 1951. 188 p.
40. Chang W.R., Etsion I., Bogy D.B. Static Friction Coefficient Model for Metallic Rough Surfaces // *ASME J. Tribol.* 1988. Vol. 110. P. 57–63.
41. Etsion I., Kligerman Y., Kadin Y. Unloading of an Elastic-Plastic Loaded Spherical Contact // *Int. J. Solids Struct.* 2005. Vol. 42 (13). P. 3716–3729.
42. Brizmer V., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on the elasticity terminus of a spherical contact // *Int. J. Solids Struct.* 2006. Vol. 43:18–19. P. 5736–5749.
43. Brizmer V., Zait Y., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on elastic-plastic spherical contact // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2006. Vol. 1 (5). P. 865–879.
44. Shankar S., Mayuram M. Effect of strain hardening in elastic-plastic transition behavior in a hemisphere in contact with a rigid flat // *International Journal of Solid Structures*. 2008. Vol. 45. P. 3009–3020.
45. Brake M. An analytical elastic-perfectly plastic contact model // *International Journal of Solid Structures*. 2012. Vol. 49. P. 3129–3141.
46. Johnson K. *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 154–179.
47. Zhao Y., Maietta D.M., Chang L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation

to fully plastic flow // *ASME Journal of Tribology*. 2000. Vol. 122. P. 86–93.

48. Brake M. An analytical elastic plastic contact model with strain hardening and frictional effects for normal and oblique impacts // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 62. P. 104–123.

49. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and unloading of a spherical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // *Int. J. of Mech. Sciences*. 2012. Vol. 56. P. 70–76.

50. Zhao B., Zhang S., Wang Q., Zhang Q., Wang P. Loading and unloading of a power-law hardening spherical contact under stick contact condition // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. Vol. 94. P. 20–26.

51. Ghaednia H., Brake M.R. W., Berryhill M., Jackson R.L. Strain Hardening From Elastic-Perfectly Plastic to Perfectly Elastic Flattening Single Asperity Contact // *ASME. J. Tribol.* 2019. Vol. 141 (3) P. 031402.

52. Jackson R.L., Ghaednia H., Pope S. A solution of rigid–perfectly plastic deep spherical indentation based on slip-line theory // *Tribol. Lett.* 2015. V. 58(3). P. 1–7.

53. Jamari J., Schipper D.J. Experimental investigation of fully plastic contact of a sphere against a hard flat // *ASME Journal of Tribology*. 2006. V. 128. P. 230–235.

54. Ghaednia H., Marghitu D.B., Jackson R.L. Predicting the permanent deformation after the impact of a rod with a flat surface // *Journal of Tribology*. 2015. V. 137 (1). P. 011403.

55. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R. Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *Int. J. Solids and Structures*. 2006. № 43. P. 4136–4153.

56. Bartier O., Hernot X., Mauvoisin G. Theoretical and experimental analysis of contact radius for spherical indentation // *Mechanics of Materials*. 2010. V. 42 (5). P. 640–656.

57. Saha S., Jackson R.L. Elastic and elastic-perfectly plastic analysis of an axisymmetric sinusoidal surface asperity contact // *Tribology — Materials, Surfaces & Interfaces*. 2019. DOI: 10.1080/17515831.2019.1663396

58. Matlin M.M., Kazankina E.N., Kazankin V.A. Calculation of the actual contact area between a single microasperity and the smooth surface of a part when the hardnesses of their materials are similar // *J. of Friction and Wear*. 2011. V. 32(2). P. 140–144.

59. Matlin M.M., Mozgunova A.I., Kazankina E.N., Kazankin V.A. Zhestkost uprugoplasticheskogo kontakta detaley mashin. M.: Mashinostroenie, 2015. 217 s.