

Моделирование погружения сваи и процесса уплотнения грунтовых сред при многократном ударе

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 16.02.2021, принята 21.02.2021

Процессы уплотнения грунта и погружения сваи при многократном ударе моделируются совершенно иначе, в сравнении с тем как это делалось раньше. Главным отличием является введение новой аналитической зависимости для силы лобового сопротивления – она определяется с учетом меняющейся прочности грунта вследствие наносимых ударов. Так, при многократном ударе в близлежащей области перед оголовком сваи будут появляться микро и макротрещины в твердой грунтовой среде, что приводит к потере связей и целостности среды, а значит и к уменьшению ее прочности. Такие изменения и приводят к возникновению возможности погружения сваи. При уплотнении грунта – удары, наоборот, способствуют к ликвидации пустот и восстановлению связей между отдельными частями не столь твердого в самом начале грунта, а значит к увеличению его прочности. Все это достигается, как правило, многократными ударами – отдельно наносимым ударом, не удастся добиться желаемого результата. Влияние многократных ударов предложено учитывать через произведение начальной скорости отдельного удара на число ударов за необходимое или отведенное время – что определяет характерную кинематическую величину такого воздействия. Вводится эталонный удар, при котором достигается предельно-равновесное состояние сваи или рабочего органа машины уплотнения – он определяется через критическую начальную скорость удара, превышение которой приводит к их погружению. Сравнение текущей серии ударов с эталонным, позволяет найти начальную скорость проникания в моменты начала погружения сваи в грунт или устанавливать диапазон начальных скоростей ударов уплотнения. При погружении сваи учитывается, что не всякий удар может приводить к погружению – для этого могут потребоваться подготовительные удары. При уплотнении грунта принятая модель позволяет определять необходимое число ударов для нужного уплотнения по заданной начальной скорости удара или, наоборот, подбирать силу ударов по заданному их числу.

Ключевые слова: свая; грунт; уплотнение грунтов; трамбование; машины уплотнения; погружение при многократном ударе; забивка сваи; лобовое сопротивление.

Simulation of pile sinking and the process of compaction of soil media with repeated impact

V.A. Koronатов

Bratsk State University, st. Makarenko, 40, Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 16.02.2021, accepted 10.21.02.2021

The processes of soil compaction and pile sinking under repeated impacts are modeled in a completely different way, compared to how it was done before. The main difference is the introduction of a new analytical relationship for the drag force. The force is determined taking into account the changing strength of the soil due to the impacts. So, with a multiple impact in the nearby area in front of the pile head, micro and macro cracks appear in a solid soil medium, which leads to a loss of bonds and integrity of the medium, and, therefore, to a decrease in its strength. Such changes also lead to the emergence of the possibility of pile sinking. On the contrary, when the soil is compacted, the blows contribute to the elimination of voids and the restoration of connections between individual parts of the not so hard at the very beginning of the soil, and, therefore, to an increase in its strength. As a rule, it is achieved by multiple blows. A separately delivered blow doesn't allow to achieve the desired result. It is proposed to take into account the influence of multiple blows through the product of the initial speed of a single blow by the number of blows in the required or allotted time, which determines the characteristic kinematic value of such an impact. A reference impact is introduced, at which the maximum equilibrium state of the pile or the working body of the compaction machine is achieved. The blow strength is determined through the critical initial impact velocity, exceeding which leads to their immersion. Comparison of the current series of impacts with the reference makes it possible to find the initial penetration rate at the moments of the beginning of the pile sinking into the ground or to set the range of the initial velocities of compaction impacts. When driving a pile, it should be noticed that not every blow can lead to a sinking, some preparatory blows might be required. When compaction of soil, the adopted model makes it possible to determine the required number of blows for the necessary compaction at a given initial impact velocity or, conversely, to select the force of blows for a given number of them.

Keywords: pile; priming; soil compaction; tamping; sealing machines; immersion with repeated impact; pile driving; drag.

Введение. Погружение сваи и уплотнение грунтов при многократном ударе, на первый взгляд, - два совершенно разных технологических процесса. Для погружения сваи необходимо добиваться разрушения грунта – путем снижения его прочностных свойств, а при уплотнении – наоборот, решается задача о сохранении целостности и увеличения прочности среды. В данной статье обсуждаются эти два вопроса при создании ударных нагрузок.

При моделировании указанных процессов на первый план выходит сила лобового сопротивления, возникающая у сваи или рабочего органа уплотняющей машины со стороны грунта. Трудности, связанные с вводом такой силы и создают основные сложности при моделировании. Силы лобового сопротивления в настоящее время принято моделировать такими силами: постоянной или упругой силой (например, [1-5]), сухим трением (например, [6-14]), в зависимости от модуля скорости проникания нулевой, первой и второй степени, или от их линейной комбинации (например, [15-21]), в виде сложных интегральных выражений, получаемых путем интегрирования элементарных сил, возникающих в пятне контакта (например, [22-24]). Достаточно сказать, что при моделировании погружения сваи не удавалось принимать во внимание то, что не каждый удар был способен вызвать погружение (например, [4,5,13]) – производственная практика показывает, что для этого часто необходимы подготовительные удары. Кроме того, для дифференциального уравнения погружения сваи в качестве начального условия были вынуждены брать начальную скорость удара (например, [4,5,13]), что по мнению автора, неправильно – она должна быть меньше этой скорости. И действие удара сводить только к возникновению начальной скорости погружения было бы далеко не полным – а ведь именно так это принято делать (например, [4,5,13]). Вызывали затруднения описание кратковременных остановок сваи перед очередным погружением – для этого было принято использовать силы сухого трения, что выглядело не столь убедительно. Динамические напряжения в грунте - необходимые для решения возможности погружения сваи в текущий момент, определялись через эмпирические соотношения (например, [22-24]).

Более простой технологический процесс – уплотнение грунтов, как это ни странно, при моделировании вызывал еще большие затруднения. Например, для описания этого процесса Пановко Г.Я. в своей книге [25] пришлось отвести почти семь страниц – при ударном, и еще почти столько же – при вибрационном, воздействиях. Причем выбранные модели не обладали необходимой ясностью, а получаемые результаты трудны для практического использования. В другой монографии [4] Тарасова В.Н. с соавторами привлекались элементы стереомеханической теории удара, а время и сама деформация упругого полупространства находилось из дифференциального уравнения погружения – что сделано было не столь корректно. Дифференциальное уравнение погружения в этих монографи-

ях использовалось с указанной выше ошибкой при выборе начального условия, а сила сопротивления в [4] принималась в виде упругой силы, а в [25] – хотя и с учетом экспериментальной характеристики степени уплотнения, но без учета влияния каждого удара на динамику ее изменение. Ниже будет показано, что для решения задачи о моделировании процесса уплотнения можно обойтись без использования уравнения погружения, добиваясь при этом ясности в понимании результатов и возможности их практического применения. Заметим, что публикаций по уплотнению грунта заметно меньше, чем о забивке сваи.

Все вышеперечисленные трудности были вызваны тем, что для решения этих задач отсутствовал подходящий инструментарий в механике – использование привычных сил сопротивления, по мнению автора, здесь не годятся. При введении таких сил сопротивления следует учитывать прочностные свойства грунтов, в том числе и возможность их изменения вследствие силового воздействия. Например, при воздействии в виде ударов прочность грунта будет меняться из-за возникающих микро и макротрещин [26]. О том, как это следует учитывать, автором подробно изложено в текущем номере журнала другой его статьи: «Элементарная теория проникания ударника в твердые грунтовые среды, с учетом возникновения трещин». Так при многократном ударе сила лобового сопротивления вводится в виде (рис. 1):

$$F_c = F_0 \left(2 - e^{-\alpha(x-x_0)} \right) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- \left[\frac{N}{T}(t-t_0) \right] + \Delta} = F_0 \left(2 - e^{-\alpha(x-x_0)} \right) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bqV_- + \Delta}. \quad (1)$$

Здесь: $\frac{N}{T}$ - определяет целое число ударов N за известный промежуток времени T ; V_- - скорость тела в начале удара; $q = \left[\frac{N}{T}(t-t_0) \right]$ - наименьшее целое число выражения, записанного внутри квадратных скобок, то есть оно определяет целое число произведенных ударов на текущий момент времени t при многократном ударном воздействии (t_0 - начальный момент такого воздействия: либо момент времени окончания очередного погружения перед кратковременной остановкой, либо нулевое значение – если погружение сваи только начинается); b, Δ - коэффициенты определяемые экспериментально; x - координата углубления сваи; точкой $\langle \cdot \rangle$ обозначается дифференцирование по времени t . По мере удаления от места удара в нижележащие слои, например, при погружении сваи, прочностные свойства грунта будут меняться в меньшей степени, о чем будет говорить, как уменьшение числа трещин, так и их размеров. Этот факт в приведенной формулах (1) учитывается функцией $2 - e^{-\alpha(x-x_0)}$, где α - параметр подбираемый из экс-

периментальных данных для данного грунта;
 $x_0 = x(t)|_{t=t_0}$ - начальная координата погружения.

При моделировании погружения сваи и уплотнения грунта будут соблюдаться следующие допущения:

1. Молот, сваи и плита уплотнения является абсолютно твердыми телами.

2. Грунт считается однородным и волновыми явлениями в нем полностью пренебрегаем.

3. Совершаемый удар является пластическим (абсолютно неупругим) и направлен перпендикулярно к поверхности грунта.

4. Торцевое сечение сваи считается плоским и располагается перпендикулярно к направлению проникания.

5. За основу берутся основные допущения стереомеханической теории удара, с единственным дополнением - нахождения максимальной силы удара согласно теории Герца [15, 27], что является необходимым для определения начальной скорости проникания тела в грунт.

6. Принята гипотеза о возникновении микро и макротрещин – при погружении сваи, или наоборот – к ликвидации пустот и трещин при работе машины уплотнения, в результате многократного удара, приводящего к изменению прочности грунта в близлежащей области.

7. Определение силы лобового сопротивления по формуле (1), выражающие изменение прочности грунта в результате произведенных ударов и то, что грунт не является абсолютно твердым телом.

8. Возникающие релаксационные процессы по частичному или полному восстановлению прочностных свойств грунта после произведенного удара являются гораздо более длительными, чем сам процесс проникания (погружения).

Погружение сваи при многократном ударе (рис.1). Рассмотрим вопрос о моделировании погружения сваи при многократном ударе. Обозначим через m_1, m_2 – соответственно массу молота и сваю, на которую, будем полагать, через равные промежутки времени падает молот, приобретающий начальную скорость U_- в момент удара; частота таких ударов равна $\frac{N}{T}$.

Силу лобового сопротивления сваи будем искать в соответствии с вышесказанным по формуле (1), где начальную скорость удара сваи совместно с молотом следует брать равной $V_- = U_- \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, полагая, что

удар абсолютно неупругий. Сила бокового трения сваи F_+ определяется по известной формуле Амонтона-Кулона: $F_+ = f\tilde{a}x$, где f - погонная сила трения, приходящаяся на единицу площади боковой поверхности, а \tilde{a} - периметр поперечного сечения сваи. Причем

$$f = \begin{cases} [-f_1; f_1], & \text{при } \dot{x} \equiv 0; \\ f_0 & \text{при } \dot{x} > 0 \ (\varepsilon = f_1 / f_0 > 1) \end{cases}$$

В общем случае погружение сваи может не сразу начаться, для этого могут потребоваться подготовительные удары для снижения прочности грунта. По-

этому будем полагать, что погружение будет состоять из двух фаз: фазы упругого взаимодействия, когда силы сопротивления со стороны грунта еще достаточно велики и не дают возможности погружения; и фазы пластических деформаций – когда, вследствие частичной потери прочности из-за произведенных ударов, свая получает возможность погружаться. Описание процесса погружения сваи при ударном воздействии во многом похоже на то, как это делается при вибрационном воздействии [28].

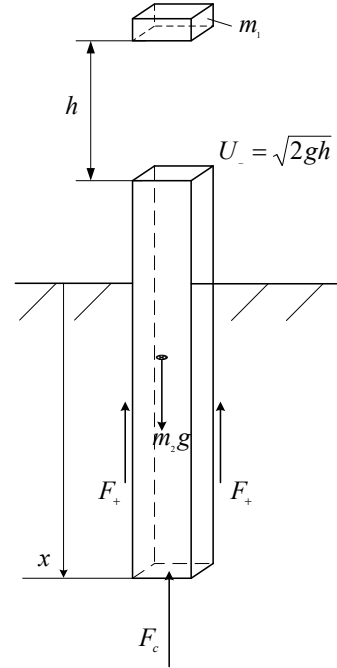


Рис. 1. Погружение сваи многократным ударом

1. Фаза упругого взаимодействия:

$$\dot{x} \equiv 0, f \in [-f_1; f_1]: \quad x_0 = \begin{cases} 0, & \text{при } t = 0; \\ x_{**} & \text{при } t > 0; \end{cases}$$

$$t_0 = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0; \\ t_{**}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Здесь t_{**}, x_{**} - соответственно время и координата погружения в конце фазы пластических деформаций, если она уже состоялась – что может быть, если эта фаза упругого взаимодействия не самая первая. Свая удерживается упругими силами грунта, когда выполняется (рис. 1):

$$Mg - F_+ - F_c = 0 \Rightarrow$$

$$Mg(1 - fax) - F_0 \frac{\Delta}{bV_- \left[\frac{N}{T}(t - t_0) \right] + \Delta} = 0,$$

Откуда получим, что $F_0 = kMg(1 - fax)$, где приняты обозначения:

$k = 1 + \frac{b}{\Delta} V_- \left[\frac{N}{T}(t - t_0) \right] = 1 + \frac{b}{\Delta} qV_-$ - коэффициент динамичности; $M = m_1 + m_2$; $a = \frac{\tilde{a}}{Mg}$ - приведенный периметр поперечного сечения сваи. Условие равнове-

сия сваи, после деления на площадь ее поперечного сечения S , примет вид:

$$\sigma - k \frac{\sigma}{k} = 0 \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma_{01} = \frac{\sigma_1}{k_*}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\sigma = \frac{Mg(1-fax)}{S} = \sigma_0(1-fax); \quad \sigma_0 = \frac{Mg}{S}$$

- статические нормальные напряжения, возникающие в грунте под торцом соответственно от полной продольной силы и от суммы сил тяжести сваи и молота; σ_1 - предельное-допустимое статическое нормальное напряжение для данного грунта, определяемое экспериментально; $\sigma_0; \sigma_{01}$ - соответственно динамическое и предельно допустимое динамические напряжения, возникающие в грунте, с учетом динамического воздействия сваи; $k_* = 1 + \frac{b}{\Delta} V_- \left[\frac{N}{T} (t_* - t_0) \right]$ - критическое значение коэффициента динамичности, где t_* - момент времени окончания текущей фазы упругого взаимодействия.

Условия окончания фазы упругого взаимодействия и перехода к фазе пластических деформаций, проявляющиеся через погружение сваи, будут выражаться, когда одновременно боковое трение покоя достигнет своего предельного значения, а предельно-допустимое динамическое напряжение упадет до текущего статического:

$$\begin{cases} \sigma_{01} = \sigma; \\ f = f_1. \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{k_*} = \sigma_0(1-f_1ax)$$

Это позволит определить сначала значение критического коэффициента динамичности:

$$k_* = \frac{n_1}{1-f_1ax}, \text{ а через него получить и уравнение}$$

для определения момент времени t_* или необходимого для этого числа ударов q_* , окончания фазы упругого взаимодействия:

$$\left[\frac{N}{T} (t_* - t_0) \right] = \frac{\Delta}{bV_-} \left(\frac{n_1}{1-f_1ax} - 1 \right). \quad (2)$$

решение которого можно найти численно. Здесь

$$n_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \text{запас прочности грунта, от действия силы}$$

тяжести сваи с молотом.

При переходе к новой фазе взаимодействия сваи с грунтом примем во внимание, что наибольшее значение силы лобового сопротивления достигает величины

$$F_{0*} = k_* Mg(1-f_1ax), \text{ а в начале погружения сваи}$$

это значение падает в $\tilde{\varepsilon}$ раз ($\tilde{\varepsilon} > 1$), оставаясь в дальнейшем (при погружении) постоянной величиной, то есть, как и у трения при переходе от покоя к движению, будет скачок; у бокового трения такой скачок определяется через ε .

Для перехода к описанию погружения сваи - фазы пластических деформаций, следует вначале определить начальную скорость проникания V_0 . Для этого, проводя аналогичные рассуждения, как это было сделано в

статье: «Элементарная теория проникания ударника в твердые грунтовые среды, с учетом возникновения трещин», следует ввести эталонный удар с начальной критической скоростью удара V_{-*} , превышение которой будет приводить к началу погружению сваи. Не повторяясь, приведем окончательные формулы:

$$V_{-*} = \frac{\Delta}{bq} \left(\frac{n_1}{1-f_1ax} - 1 \right); \quad (3)$$

$$V_0 = V_- - V_{-*}. \quad (4)$$

2. Фаза пластических деформаций (погружения): $\dot{x} > 0$; $\dot{x}_0 = V_0$; $f = f_0 = f_1/\varepsilon$; $F_{0*} \rightarrow F_{0*}/\tilde{\varepsilon}$.

С учетом сделанных выше замечаний о силах сопротивления, дифференциальное уравнение движения сваи запишется так:

$$\ddot{x} = g \left(1 - \frac{f_1ax}{\varepsilon} \right) - \frac{n_1g}{\tilde{\varepsilon}} \left(2 - e^{-\alpha(x-x_0)} \right) \times \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- \left[\frac{N}{T} (t-t_0) \right] + \Delta}, \quad (5)$$

которое подразумевает нахождение решений только численными методами. Окончание погружения, а значит и первых двух фаз, следует ожидать, когда $\dot{x} = 0$. В момент окончания погружения следует принять, что $t_{**} = t$ и $x_{**} = x$ и перейти в начало описанного алгоритма.

После этой фазы снова начинается фаза упругих деформаций грунта, с последующем переходом к фазе пластических деформаций, которые следует описывать аналогичным образом. Тем самым, процесс погружения сваи предлагается описывать как почти периодический процесс с повторяющимися последовательно друг за другом фазами упругих и пластических деформаций. Очевидно, что продолжительность фаз упругих деформаций будет расти, а продолжительность фаз погружения будет наоборот уменьшаться до полной остановки, вследствие уменьшения силы давления сваи, за счет ее разгрузки и увеличивающейся силой бокового трения.

Описанный процесс погружения сваи не трудно моделировать на компьютере, используя описанный алгоритм и численные методы.

Уплотнение грунта многократным ударом (рис.2). Машину уплотнения будем представлять, как механическую систему, состоящая из двух тел: плиты уплотнения массы m_2 и молота массы m_1 , который через равные промежутки времени сбрасывается с некоторой высоты и приобретающий начальную скорость

$$U_- \text{ в моменты удара; частота таких ударов равна } \frac{N}{T}.$$

Поскольку уплотняются обычно рыхлые грунты, а сила отдельных ударов не столь велика, то будем считать, что в результате таких ударов существующие пустоты и трещины будут исчезать или уменьшаться в размерах, а значит за счет улучшения связей между отдельными частями - будет возрастать и прочность грунта.

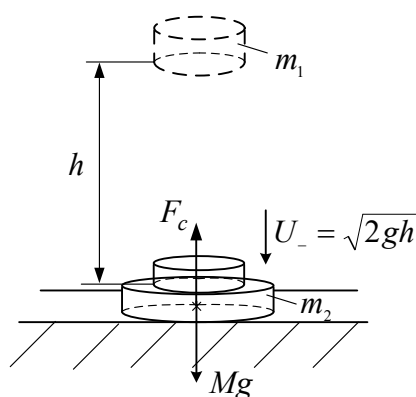


Рис. 2. Уплотнение грунта многократным ударом

Увеличение прочности грунта будем учитывать через кинематическую величину:

$$V_- q = V_- \left[\frac{N}{T} (t - t_0) \right] \quad (6)$$

- которая аналогична ранее вводимой при рассмотрении вопроса о моделировании погружении сваи – только там она, наоборот, говорила о снижении прочности среды (поскольку грунт ранее предполагался твердым). Для того, чтобы сила лобового сопротивления увеличивалась при многократном ударе в аналитической зависимости вида $F_c = F_0 \frac{V + \Delta}{V + \Delta_1}$, введем ее в числитель:

$$F_c = F_0 \frac{V + bV_- \left[\frac{N}{T} (t - t_0) \right] + \Delta}{V + \Delta_1},$$

где в дальнейшем не принципиальна разница между Δ и Δ_1 . Поэтому, с учетом, что $V \equiv 0$, окончательно примем:

$$F_c = F_0 \left\{ 1 + \frac{b}{\Delta} V_- \left[\frac{N}{T} (t - t_0) \right] \right\} = F_0 \left(1 + \frac{b}{\Delta} q V_- \right). \quad (7)$$

Здесь $V_- = U_- \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ - начальная скорость удара о

грунт плиты уплотнения в момент удара молота. Плита уплотнения с молотом в моменты его падения будет находиться в равновесии, без погружения в грунт (рис. 2), при соблюдении равенства:

$$Mg - F_c = 0 \Rightarrow Mg - F_0 \left(1 + \frac{b}{\Delta} q V_- \right) = 0,$$

Откуда получим, что $F_0 = \frac{Mg}{k}$, где приняты обозначения:

$k = 1 + \frac{b}{\Delta} q V_-$ - коэффициент динамичности; q - число произведенных ударов; $M = m_1 + m_2$. Условие равновесия плиты уплотнения с молотом, после деления на площадь ее поперечного сечения S , примет вид:

$$\sigma - k \frac{\sigma}{k} = 0 \Rightarrow \sigma_\delta = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow$$

$$\sigma_{\delta 1} = \frac{\sigma_1}{k_*} \Rightarrow \sigma_{\delta 1*} = \frac{\sigma_{1*}}{k_{**}}.$$

Здесь приняты обозначения: $\sigma = \frac{Mg}{S}$ - статическое нормальное напряжение, возникающие в грунте под плитой; σ_1, σ_{1*} - соответственно предельное и желаемое для нужного уплотнения ($\sigma_1 > \sigma_{1*}$) статические нормальные напряжения для данного грунта, определяемое экспериментально; $\sigma_\delta, \sigma_{\delta 1}, \sigma_{\delta 1*}$ - соответственно динамическое, предельно допустимое и предельно желаемое для нужного уплотнения динамические напряжения, возникающие в грунте, с учетом динамического воздействия плиты уплотнения; $k_{**} = 1 + \frac{b}{\Delta} q_* V_-$ - критическое значение коэффициента динамичности, где q_{**} - максимальное число ударов нужное для желаемой прочности (уплотнения) грунта. Чтобы достичь нужного уплотнения грунта необходимое число ударов q_{**} с заданной начальной скоростью V_- (ударов) можно рассчитать из условия: $\sigma_{\delta 1*} = \sigma$. Откуда следует, что

$$q_{**} = \frac{\Delta}{bV_-} (n_{1*} - 1), \text{ где } n_{1*} = \frac{\sigma_{1*}}{\sigma} - \text{Запас прочности}$$

грунта для желаемой прочности грунта. Полученная формула для q_{**} позволяет рассчитать и необходимое время $t_{**} - t_0$ для многоударной обработки грунта, для этого следует использовать введенную зависимость числа ударов от частоты ударов и времени воздействия:

$$\left[\frac{N}{T} (t_{**} - t_0) \right] = \frac{\Delta}{bV_-} (n_{1*} - 1). \quad (8)$$

Заметим, что при превышении найденного максимального значения числа ударов q_* , будет наблюдаться обратная картина – грунт начнет разрушаться, становясь снова рыхлым. Это объясняется тем, что, достигнув своего максимально возможного уплотнения, грунт начинает терять свою прочность, если продолжить наносить удары на плиту – о чем говорят экспериментальные данные. Очевидно, что диапазон для начальных скоростей наносимых ударов должен подчиняться условию: $V_- < V_{-*}$, где V_{-*} - начальная скорость эталонного удара:

$$V_{-*} = \frac{\Delta}{bq} (n_1 - 1), \quad (9)$$

которая записывается аналогично ранее полученной формуле (3).

Заключение. В данной работе приведены совершенно новые принципы моделирования погружения сваи и уплотнения грунтов, которые основаны на предположении изменения прочностных свойств грунта при многократном ударе. В сравнении с традиционными методами, новый подход значительно упростил сам процесс моделирования и, кроме того, позволяет получать более ясные и физически понятные решения. По-

лученные результаты можно рекомендовать к практическому применению в инженерной практике.

Литература

- Баркан Д.Д. Виброметод в строительстве. М.: Гостройиздат, 1959. 316 с.
- Савинов О.А., Лускин А.Я. Вибрационный способ погружения свай и его применение в строительстве. Л.: Гостройиздат, 1960. 252 с.
- Гончаревич И.Ф., Сергеев П.А. Вибрационные машины в строительстве. М.: Гостехиздат, 1963. 311 с.
- Тарасов В.Н., Бояркина И.В., Коваленко М.В. Теория удара в строительстве и машиностроении. М.: Изд-во АСВ, 2006. 336 с.
- Аптуков В.Н., Фонарев А.В. Приближенная оценка глубины проникания сваи в грунт при многократном ударе // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 2 (2). С. 41-45.
- Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
- Неймарк Ю.И. Математическое моделирование как наука и искусство. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2010. 420 с.
- Неймарк Ю.И. Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания // Инженерный сборник АН СССР. 1953. Т. XVI. С. 13-49.
- Кушуль М.Я., Шляхтин А.В. К вопросу вибрационного погружения цилиндрического стержня в упругопластическую среду // Изв. АН СССР, ОТН. 1954. № 1. С. 92-104.
- Блехман И.И. Исследование процесса вибрационной забивки свай и шпунтов // Инженерный сборник. 1954. Т. XIX. С. 55-64.
- Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 412 с.
- Блехман И.И. Вибрационная техника. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
- Цейтлин М.Г., Верстов В.В., Азбель Г.Г. Вибрационная техника и технология в свайных и буровых работах. Л.: Стройиздат, 1987. 263 с.
- Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1968. 362 с.
- Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит. по строит., 1985. 448 с.
- Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, B.G. Teubner, 1922.
- Levi-Civita T. Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi, Atti R. Ist. Veneto Scienze, Lettere ed Arti, 65, 1906, 1149.
- Poncelet J.V. Traite de mecanique industrielle. 2nd Edition. Bruges, J. Schiwell, 1844.
- Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C.R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
- Rubins B. New Principles of Gunnery. (Mathematical Tracts of the late Benjamin Robins. 1). London, J. Neurse, 1761.
- Сагомонян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
- Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
- Митенков Ф.М., Баженов В.Г., Котов В.Л., Тарасова А.А. Численно-аналитический метод исследования устойчивости осесимметричного движения тел вращения в грунтовых средах // Доклады Акад. наук. 2016. Т. 470. № 5. С. 531-535.
- Баженов В.Г., Котов В.Л. Численно-аналитический метод исследования устойчивости движения тел вращения в мягких грунтовых средах // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 688-698.
- Пановко Г.Я. Лекции по основам теории вибрационных машин и технологий. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 192 с.
- Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. Динамика удара. М.: Мир, 1985. 286 с.
- Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
- Коронатов В.А., Герасимов С.Н., Дудина И.В. Теория погружения сваи в грунт при продольно-вибрационном воздействии // Системы. Методы. Технологии. 2020. № 4 (48). С. 26-31.

References

- Barkan D.D. Vibration method in construction. M.: Gostrojizdat, 1959. 316 p.
- Savinov O.A., Luskina A.YA. Vibration method of driving piles and its application in construction. L.: Gostrojizdat, 1960. 252 p.
- Goncharevich I.F., Sergeev P.A. Vibrating machines in construction. M.: Gostekhizdat, 1963. 311 p.
- Tarasov V.N., Boyarkina I.V., Kovalenko M.V. The theory of blow in construction and mechanical engineering. M.: Izd-vo ASV, 2006. 336 p.
- Aptukov V.N., Fonarev A.V. An approximate estimate of the depth of penetration of a pile into the ground under multiple impacts // Bulletin of Perm state university. Mathematics. Mechanics. Information science. 2010. Vyp. 2 (2). P. 41-45.
- Nagaev R.F. Mechanical processes with repeated decaying collisions. M.: Nauka, 1985. 200 p.
- Nejmark YU.I. Mathematical modeling as a science and art. N. Novgorod: Izd-vo Nizhegorodskogo gos. un-ta, 2010. 420 p.
- Nejmark YU.I. Theory of vibration immersion and vibration pulling // Inzhenernyj sbornik AN SSSR. 1953. V. XVI. P. 13-49.
- Kushul' M.YA., SHlyahtin A.V. On the issue of vibrational immersion of a cylindrical rod in an elastoplastic medium // Izv. AN SSSR, OTN. 1954. № 1. P. 92-104.
- Blekhman I.I. Investigation of the process of vibrational driving of piles and sheet piles // Inzhenernyj sbornik. 1954. V. XIX. P. 55-64.
- Blekhman I.I., Dzhanelidze G.YU. Vibration displacement. M.: Nauka, 1964. 412 p.
- Blekhman I.I. Vibration technology. M.: Fizmatlit, 1994. 400 p.
- Cejtlin M.G., Verstov V.V., Azbel' G.G. Vibration equipment and technology in piling and drilling operations. L.: Strojizdat, 1987. 263 p.
- Byhovskij I.I. Foundations of the theory of vibration technology. M.: Mashinostroenie, 1968. 362 p.
- Gol'dsmit V. Udar. Theory and physical properties of colliding bodies. M.: Izd-vo lit. po stroit., 1985. 448 p.
- Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, B.G. Teubner, 1922.
- Levi-Civita T. Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi, Atti R. Ist. Veneto Scienze, Lettere ed Arti, 65, 1906, 1149.
- Poncelet J.V. Traite de mecanique industrielle. 2nd Edition. Bruges, J. Schiwell, 1844.
- Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C.R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
- Rubins B. New Principles of Gunnery. (Mathematical Tracts of the late Benjamin Robins. 1). London, J. Neurse, 1761.

21. Sagomonyan A.YA. Penetration. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299 p.
22. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Mathematical modeling of non-stationary processes of impact and penetration of axisymmetric bodies and identification of the properties of soil media. M.: Fizmatlit, 2011. 208 p.
23. Mitenkov F.M., Bazhenov V.G., Kotov V.L., Tarasova A.A. A numerical-analytical method for studying the stability of axisymmetric motion of bodies of revolution in soil media // Doklady Akad. nauk. 2016. V. 470. № 5. P. 531-535.
24. Bazhenov V.G., Kotov V.L. A numerical-analytical method for studying the stability of the motion of bodies of revolution in soft soil media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. V. 81. Vyp. 6. P. 688-698.
25. Panovko G.YA. Lectures on the basics of the theory of vibration machines and technologies. M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2008. 192 p.
26. Zukas Dzh.A., Nikolas T., Swift H.F. Dynamics of impact. M.: Mir, 1985. 286 p.
27. Panovko YA.G. Foundations of the applied theory of vibrations and impact. L.: Mashinostroenie, 1976. 320 p.
28. Koronatov V.A., Gerasimov S.N., Dudina I.V. The theory of pile immersion in the ground under longitudinal vibration action // Systems. Methods. Technologies. 2020. № 4 (48). P. 26-31.