УДК 62-03 DOI: 10.18324/2077-5415-2026-3-145-153

Моделирование структуры древесины как композитного материала

В.Е. Бызов[1a], В.И. Мелехов[2b], А.С. Торопов[3c]

[1] Санкт-Петербургская государственная художественно-промышленная академия имени А.Л. Штиглица, Соляной пер., 13, Санкт-Петербург, Россия
[2] Северный (Арктический) федеральный университет, наб. Северной Двины, 17, Архангельск, Россия
[3] Поволжский государственный технологический университет, пл. Ленина, 3, Йошкар-Ола, Россия
[a] mapana@inbox.ru, [b] bhseng@narfu.ru, [c] Toropov_A_S@mail.ru.
[a] http:// orcid.org/0000-0002-2078-5226, [b] http:// orcid.org/0000-0002-2583-3012,
[c] http:// orcid.org/0000-0002-9011-6562.
Статья поступила 05.06.2026, принята 10.09.2026.

Древесина обладает ярко выраженными анизотропными свойствами. Анизотропия древесины обусловлена особенностями её строения и прежде всего волокнами древесины, расположенными в основном в одном направлении. На прочностные характеристики древесины хвойных пород влияет расположение годичных колец и чередование в них поздней и ранней древесины. В результате раскроя круглых лесоматериалов, когда пропилы происходят перпендикулярно годичным кольцам, получают радиальные пиломатериалы. Пиломатериалы радиального способа распиловки обладают высокими прочностными характеристиками. Они подходят для изготовления элементов несущих конструкций, подвергающихся высоким эксплуатационным нагрузкам. Применение радиальных пиломатериалов позволяет получать элементы клееных конструкций с необходимыми прочностными характеристиками при меньших размерах поперечного сечения. Это позволяет снизить материалоёмкость несущих конструкций. В статье предложена структурная модель древесины как однонаправленного композитного материала. Древесина представлена как композитный материал, состоящий из чередующихся слоёв, обладающих свойствами волокон или матрицы. В качестве слоя волокна принят слой ранней древесины годичного слоя, а матрицы – слой поздней древесины. Рассмотрено появление напряжений, возникающих в элементарном объёме древесины при приложении нагрузки. Установлены связи между напряжениями и деформациями в волокне и матрице и средними напряжениями, возникающими в древесине в случае приложения нагрузки в направлении волокон древесины. Найдены зависимости величины нормальных напряжений в волокне и матрице от средних значений напряжений в древесине. Считая модель композитного материала трансверсально изотропным телом, нашли зависимости модулей упругости через упругие постоянные и объёмные доли компонентов. Сравнительный расчёт условных модулей упругости при воздействии нагрузки вдоль направления годичных колец и перпендикулярно им показал, что условный модуль упругости элементарного объёма древесины при изгибе в плоскости годичных слоёв на 22 % больше условного модуля упругости при изгибе пластины в плоскости, перпендикулярной годичным слоям.

Ключевые слова: *анизотропия древесины; радиальные пиломатериалы; прочностные характеристики; композитный материал; ранняя древесина годичного слоя; поздняя древесина годичного слоя; напряжения в древесине; модуль упругости элементарного объёма древесины.*

Modeling the structure of wood as a composite material

V.E. Byzov[1a], V.I. Melekhov[2b], A.S. Toropov[3c]

[1] St. Petersburg State Art and Industrial Academy named after A.L. Stieglitz; 13, Solyanoy Lane, St. Petersburg, Russia
[2] The Northern (Arctic) Federal University; 17, Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk, Russia
[3] Volga State University of Technology; 3, Lenin Sq., Yoshkar-Ola, Russia
[a] mapana@inbox.ru, [b] bhseng@narfu.ru, [c] Toropov_A_S@mail.ru.
[a] http:// orcid.org/0000-0002-2078-5226, [b] http:// orcid.org/0000-0002-2583-3012,
[c] http:// orcid.org/0000-0002-9011-6562
Received 05.06.2026, accepted 10.09.2026.

Wood possesses pronounced anisotropic properties. The anisotropy of wood is determined by the features of its structure and, above all, by the wood fibers, which are arranged predominantly in one direction. The strength characteristics of coniferous wood are influenced by the arrangement of annual rings and the alternation of latewood and earlywood within them. As a result of sawing round timber, when the cuts are made perpendicular to the annual rings, radial lumber is obtained. Lumber produced by the radial sawing method possesses high strength characteristics. It is suitable for manufacturing elements of load-bearing structures subjected to high service loads. The use of radial lumber makes it possible to obtain elements of glued structures with the required strength characteristics at smaller cross-sectional dimensions. This makes it possible to reduce the material intensity of load-bearing structures. The article proposes a structural model of wood as a unidirectional composite material. Wood is represented as a composite material consisting of alternating layers possessing the properties of fibers or a matrix. The layer of earlywood of the annual layer is taken as the fiber layer, and the layer of latewood as the matrix. The occurrence of stresses arising in an elementary volume of wood when a load is applied is considered. Relationships have been established between stresses and strains in the fiber and matrix and the average stresses arising in wood when a load is applied in the direction of the wood fibers. Dependences of the magnitude of normal stresses in the fiber and matrix on the average stress values in wood have been found. Considering the composite material model as a transversely isotropic body,

dependences of the elastic moduli have been determined in terms of the elastic constants and volume fractions of the components. A comparative calculation of the conditional elastic moduli under the action of a load along the direction of the annual rings and perpendicular to them showed that the conditional elastic modulus of an elementary volume of wood under bending in the plane of the annual layers is 22% greater than the conditional elastic modulus under bending of a plate in the plane perpendicular to the annual layers.

Keywords: wood anisotropy; radial lumber; strength characteristics; composite material; early wood of the annual layer; late wood of the annual layer; stresses in wood; modulus of elasticity of the elementary volume of wood.

Введение. Древесина обладает ярко выраженными анизотропными свойствами. Термин анизотропия происходит от греческих слов *анизос* (неравный) и *тропос* (направление). Анизотропия – неоднородность механических и физических свойств в различных структурных направлениях [1]. Различают три основных структурных направления. Считают, что свойства древесины однородны в каждом из этих направлений. В качестве осей структурной симметрии древесины рассматривают три взаимных перпендикулярных направления: вдоль волокон древесины *a* (*x*); радиальное *r* (*y*); тангенциальное *t* (*z*) (рис. 1).

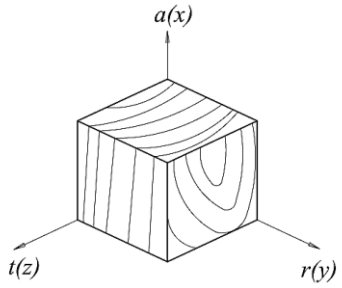

Рис. 1. Оси и плоскости симметрии элементарного объёма древесины [1]

Анизотропия древесины является следствием упорядоченности в расположении структурных элементов и их ориентации [1]. Прочностные и упругие свойства древесины изменяются в продольном и поперечном направлении. Изменение прочностных характеристик в различных направлениях может быть представлено в полярных координатах геометрической фигурой – поверхностью анизотропии, описанной радиусами-векторами, изображающими величину механической характеристики в соответствующих направлениях и выходящими из начала координат (рис. 2).

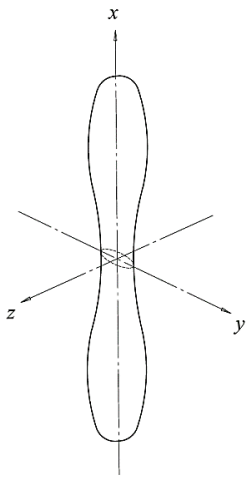

Рис. 2. Поверхность анизотропии модуля упругости древесины, рассматриваемой как ортотропный материал [1]

Оси x, y и z являются осями структурной симметрии древесины: x – вдоль волокон древесины, y – радиальным и z – тангенциальным направлениями. Свойства древесины в главных анатомических направлениях различаются в 2 и более раз. Различие упругих свойств древесины в трёх взаимно перпендикулярных направлениях установлено в 20-х гг. XX века. Значительный вклад в изучение анизотропии упругих и прочностных свойств древесины внесли отечественные и зарубежные исследователи: Е.К. Ашкенази, Е.Г. Лехницкий, А.Н. Митинский, В.Н. Глухих, A. Ylinen [1–5] и др.

Основное соотношение между напряжением и деформацией для упругих анизотропных материалов, в том числе древесины в матричной форме имеет вид [6]:

$$\{\varepsilon\}=[D]\{\sigma\}, \qquad (1)$$

где $\{\varepsilon\}$ – вектор деформаций; $[D]$ – матрица податливости; $\{\sigma\}$ – вектор напряжений.

Матрица податливости для ортотропных материалов, имеющих три плоскости упругой симметрии, имеет вид:

$$[D]=\begin{bmatrix} 1/E_r & -\mu_{tr}/E_r & -\mu_{ar}/E_r & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{rt}/E_t & 1/E_t & -\mu_{at}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{ra}/E_a & -\mu_{ta}/E_a & 1/E_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{rt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{ta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{ta} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент поперечной деформации; G – модуль сдвига.

Первый индекс μ указывает направление поперечной деформации ε, второй – направление вызвавшего его напряжения σ. Двойные индексы G соответствуют направлением осей симметрии, между которыми происходит изменение прямого угла. Индекс *a* указывает направление вдоль волокон древесины, *r* – радиальное направление поперек волокон, *t* – тангенциальное направление поперек волокон. Из двенадцати постоянных, входящих в матрицу податливости, только девять являются независимыми, так как в силу симметрии матрицы правой части для ортотропных тел всегда выполняются следующие условия:

$$\frac{\mu_{ra}}{E_a}=\frac{\mu_{ar}}{E_r};\ \frac{\mu_{ta}}{E_a}=\frac{\mu_{at}}{E_t};\ \frac{\mu_{tr}}{E_r}=\frac{\mu_{rt}}{E_t}. \qquad (3)$$

Эти соотношения хорошо описывают результаты экспериментальных исследований, получаемые при испытании малых чистых образцов.

Высокую прочность древесины в направлении волокон придаёт ориентация более 90 % волокон древесины вдоль ствола растущего дерева. Древесина состоит из различного набора анатомических элементов с упорядоченной волокнистой структурой. Расположение древесных волокон вдоль оси дерева обуславливает резкое различие механических свойств древесины в направлении вдоль и поперек ствола. Это различие усиливается влиянием микрофибрилл в клеточных стенках и ориентации части молекул целлюлозы в микрофибриллах. Модули упругости для направления вдоль волокон древесины ели почти в 40 раз больше, чем поперёк, а пределы прочности при сжатии в 10 раз, при растяжении в 20–30 раз больше [1]. Таким образом, различие в величине характеристик свойств древесины вдоль и поперек волокон обусловлено её макро- и микростроением. Механическую опорную функцию в древесине хвойных пород выполняют трахеиды, которые вертикально расположены в растущем дереве и составляют более 90 % объёма древесины. Поздние трахеиды, у которых размеры в тангенциальном направлении больше, чем в радиальном, а стенки их толще, чем у ранних. Размеры трахеид обуславливают слоистое строение древесины. Различие в размерах трахеид вызывается временем их образования: одни образуются в начале вегетационного периода (ранняя древесина), а другие в его завершении (поздняя древесина). Вследствие этого годичные кольца имеют слои более светлой ранней (*early wood*) и более тёмной поздней (*late wood*) древесины. Плотность поздней древесины примерно в 2–3 раза больше, чем плотность ранней [7]. В то же время плотность древесины изменяется по радиусу и высоте ствола растущего дерева [8]. Большое влияние на плотность древесины оказывает процент содержания поздней древесины в годичных слоях [9]. Регулярность строения древесины наблюдается от микроуровня до её макроструктуры. Е.К. Ашкинази указывает, что слоистость, обусловленная чередованием в годичных слоях ранней и поздней древесины, определяет различие в механической прочности в радиальном и тангенциальном направлении [1]. Наибольшую прочность при сжатии поперёк волокон древесина имеет в тангенциальном направлении, если при этом кривизна годичных колец при этом достаточно мала. Поздние трахеиды, у которых размеры в тангенциальном направлении больше, чем в радиальном, а стенки толще, чем у ранних, определяют при сжатии в тангенциальном направлении механическую прочность древесины. При растяжении в радиальном направлении разрушение происходит по слабому слою ранней древесины, а в тангенциальном – разрыву сопротивляются слои ранние и поздние, причём последние воспринимают большую часть нагрузки. В древесине хвойных пород влияние сердцевинных лучей на прочность незначительно [1]. В настоящее время широко применяется клееная древесина. Как указывают Е.Н. Серов и В.В. Белов, главным недостатком конструктивных элементов из клееной древесины является её анизотропность в направлении поперёк волокон [10]. В статье [11] авторы сравнивают анизотропные свойства природной и клееной древесины, в частности влияние модуля упругости в зависимости от угла приложения нагрузки относительно направления волокон. Рассмотрены ортотропный и транверсально изотропный методы описания анизотропии.

Методика и результаты моделирования. В целях прогнозирования прочностных характеристик деревоклееной конструкции из ламелей радиального способа распиловки рассмотрено поведение элементарного объёма древесины хвойной породы с явно выраженными годичными слоями при поперечном изгибе. Расположение годичных слоёв по отношению к плоскости изгиба будет варьироваться. В первом случае направление годичных слоёв будет совпадать с плоскостью изгиба, а во втором случае они будут направлены перпендикулярно этой плоскости.

Древесину хвойных пород с явно выраженными годичными слоями можно представить в виде однонаправленного слоистого композиционного материала (рис. 3, *а*). В каждом годичном слое древесины присутствует слой ранней и поздней древесины. Ранняя, более мягкая древесина служит для проведения питательных веществ по стволу, а поздняя, более твёрдая древесина придаёт древесине необходимую прочность [12]. Примем, что слои поздней древесины являются армирующими элементами материала. Слои ранней древесины будут являться связующими элементами.

Модель такого материала представим в виде пластины, состоящей из чередующихся слоёв, обладающих свойствами поздней древесины или ранней древесины (рис. 3, *б*). Приняли, что связь между ранней и поздней древесинами годичных слоёв и они сами линейно упруги. Показатели упругости в принятой модели могут быть определены по известной методике, применяемой для расчётов композиционных материалов [6].

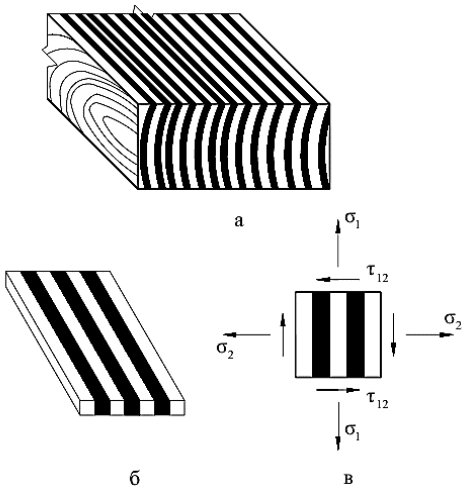

Рис. 3. Модель древесины, состоящей из чередующихся слоев ранней и поздней древесины: *а* – схема пластины с чередующими слоями; *б, в* – напряжения в элементарном объёме древесины с чередующимися слоями [6]

Ввели следующие обозначения: $\varepsilon_{1П}$, $\varepsilon_{2П}$ – относительные продольные деформации поздней древесины годичного слоя; $\gamma_{12П}$ – поперечная деформация поздней древесины годичного слоя; $\varepsilon_{1Р}$, $\varepsilon_{2Р}$ – относитель-

ные продольные деформации ранней древесины годичного слоя; $\gamma_{12Р}$ – поперечная деформация ранней древесины годичного слоя; σ_1, σ_2, τ_{12}– средние напряжения в однонаправленном материале, равные отношению усилий к суммарной площади поперечного сечения элементарного объёма древесины (рис. 3.6, *в*); ε_1, ε_2, γ_{12}– деформации в элементарном объёме древесины. Установили связи между напряжениями и деформациями в поздней древесине, ранней древесине и средними напряжениями в элементарном объёме древесины, между упругими характеристиками поздней и ранней древесины годичного слоя.

В модели древесины выполняются следующие условия равновесия и совместности деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{1П} = \varepsilon_{1Р}\ ; \\ \sigma_2 &= \sigma_{2П} = \sigma_{2Р}\ ; \\ \tau_{12} &= \tau_{12П} = \tau_{1Р}\ . \end{aligned} \qquad (4)$$

При рассмотрении деформирования древесины в случае нагружения в направлении волокон имеются зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{1П}\ \psi + (1 - \psi)\ \sigma_{1Р}\ ; \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{2П}\ \psi + (1 - \psi)\ \varepsilon_{2Р}\ ; \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12П}\ \psi + (1 - \psi)\ \gamma_{12Р}\ , \end{aligned} \qquad (5)$$

где ψ – объёмная доля поздней древесины; $(1 - \psi)$ – объёмная доля ранней древесины.

Закон Гука при условии изотропности поздней и ранней древесины представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1П} &= \frac{1}{E_П}\ (\sigma_{1П} - \nu_П \sigma_{2П}); \\ \varepsilon_{2П} &= \frac{1}{E_П}\ (\sigma_{2П} - \nu_П \sigma_{1П}); \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12П} &= \frac{1}{G_П}\ \tau_{12П}, \\ \varepsilon_{1Р} &= \frac{1}{E_Р}\ (\sigma_{1Р} - \nu_В \sigma_{2Р}); \\ \varepsilon_{2Р} &= \frac{1}{E_Р}\ (\sigma_{2Р} - \nu_Р \sigma_{1Р}); \\ \gamma_{12Р} &= \frac{1}{G_Р}\ \tau_{12Р}, \end{aligned} \qquad (7)$$

где $\nu_П$ – коэффициент Пуассона поздней древесины; $\nu_Р$ – коэффициент Пуассона ранней древесины.

Преобразовав соотношения (4–7), выразили напряжения в ранней и поздней древесине через средние напряжения в древесине:

$$\sigma_{1Р} = \frac{E_Р \sigma_1 + \psi\ (\nu_Р E_П - \nu_П E_Р) \cdot \sigma_2}{\psi E_П + (1 - \psi) E_Р}\ ,$$

$$\sigma_{1П} = \frac{E_П \sigma_1 + (1 - \psi)\ (\nu_Р E_П - \nu_П E_Р) \cdot \sigma_2}{\psi E_П + (1 - \psi) E_Р}\ .$$

Средние деформации могут быть выражены следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{\psi E_П + (1 - \psi) E_Р} - \frac{\psi \nu_П + (1 - \psi) \nu_Р}{\psi E_П + (1 - \psi) E_Р} \cdot \sigma_2, \qquad (8)$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\psi E_Р + (1 - \psi) E_П}{E_П E_Р} - \frac{\psi (1 - \psi)\ (\nu_Р E_П - \nu_П E_Р)^2}{E_П E_Р\ [\psi E_П + (1 - \psi) E_Р)]} \right) \cdot \sigma_2 - \frac{\psi \nu_П + (1 - \psi) \nu_Р}{\psi E_П + (1 - \psi) E_Р} \cdot \sigma_1, \qquad (9)$$

$$\gamma_{12} = \left(\frac{\psi}{G_П} + \frac{(1 - \psi)}{G_Р} \right) \cdot \tau_{12} = \frac{\psi G_Р + (1 - \psi) G_П}{G_П G_Р} \cdot \tau_{12}. \qquad (10)$$

Считая модель композитного материала трансверсально изотропным телом, нашли зависимости модулей упругости через упругие постоянные и объёмные доли компонентов:

$$\begin{aligned} E_1 &= \psi E_П + (1 - \psi) E_Р, \\ E_2 &= \frac{E_П E_Р\ E_1}{E_1\ [\psi E_Р + (1 - \psi) E_П] - \psi (1 - \psi) (\nu_Р E_П - \nu_П E_Р)^2}\ . \end{aligned} \qquad (11)$$

Пренебрегая членами, имеющими порядок квадрата коэффициентов Пуассона в сравнении с единицей, можно привести уравнение (11) к более простому виду:

$$E_2 \approx \frac{E_П E_Р}{\psi E_Р + (1 - \psi) E_П}\ .$$

Для модуля сдвига имеем аналогичную по структуре формулу:

$$G_{12} = \frac{G_П G_Р}{\psi G_Р + (1 - \psi) G_П}\ . \qquad (12)$$

В формуле (12) модули сдвига изотропных волокна и матрицы соответственно равны:

$$G_П = \frac{E_П}{2(1 + \nu_П)};\quad G_В = \frac{E_В}{2(1 + \nu_В)}\ .$$

Коэффициенты Пуассона однонаправленного композитного материала имеют вид:

$$\nu_{12} = \psi \nu_П + (1 + \psi) \nu_Р;\ \nu_{21} = \frac{\nu_{12}}{E_1}\ E_1.$$

Считаем, что слои материала связаны между собой таким образом, что отсутствует проскальзывание слоёв друг относительно друга. Согласно гипотезам Кирхгофа-Лява, выражения для деформаций соотношения упругости многослойного пакета с чередованием слоёв поздней и ранней древесины при изгибе имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= e_x + z x_x; \\ \varepsilon_y &= e_y + z x_y; \\ \gamma_{xy} &= e_{xy} + z x_{xy}, \end{aligned} \qquad (13)$$

где ε_x, ε_y, γ_{xy} – перемещения точек пакета в направлении соответствующих осей координат; e_x, e_y, e_{xy} – перемещения точек срединной плоскости в направлении соответствующих осей координат; z – расстояние до некоторой координатной плоскости; x_x, x_y, x_{xy} – изменения кривизны пластины.

В матричной форме выражения для деформаций можно записать следующим образом:

$$\{\varepsilon_{xy}\} = \{e\} + z\ \{x\},$$

где $\{e\}$ – матрица-столбец перемещения точек срединной плоскости, $\{e\} = \{e_x, e_y, e_{xy}\}$; $\{x\}$ – матрица-столбец изменений кривизны пластины, $\{x\} = \{x_x, x_y, x_{xy}\}$.

Применив уравнение (13) для выражения напряжений в k-ом слое, имеем:

$$\{\sigma_{xy}\}^{(k)} = [G]^{(k)}(\{e\} + z\{x\}), \qquad (14)$$

где $\{\sigma_{xy}\}^{(k)}$ – нормальные напряжения в k-ом слое; $[G]^{(k)}$ – модуль сдвига k-ого слоя.

Для следующего k+1 слоя в пакете слоя уравнение аналогично уравнению (14):

$$\{\sigma_{xy}\}^{(k+1)} = [G]^{(k+1)}(\{e\} + z\{x\}).$$

Анализ уравнений (13) и (14) показывает, что при линейном распределении деформаций по толщине пакета слоёв, нормальные напряжения в общем случае распределены кусочно-линейно и при $[G]^{(k)} \neq [G]^{(k+1)}$ скачкообразно изменяются на границах слоя.

Модель представляет собой последовательность изотропных слоев ранней и поздней древесины. Слой поздней древесины толщиной h_1 имеет модуль упругости E_1 и коэффициент Пуассона ν_1. Слой ранней древесины толщиной h_2 имеет модуль упругости E_2 и коэффициент Пуассона ν_2. Для годичного слоя древесины, состоящего из поздней и ранней древесины, соединенных параллельно, выражение модуля сдвига в плоскости слоя имеет вид

$$G = \frac{1}{h}(h_1 G_1 + h_2 G_2). \qquad (15)$$

Для плоского напряженного состояния в координатах x, y общая форма напряжение-деформация записывается следующими уравнениями:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \qquad (16)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}), \qquad (17)$$

где E – модуль упругости годичного слоя, ГПа; ν – коэффициент Пуассона; ε_{xx}, ε_{yy} – относительная деформация соответственно в координатах x и y.

В случае, когда относительная деформация в плоскости yy отсутствует, то есть $\varepsilon_{yy} = 0$, то среднее по сечению напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{h}\left(h_1 \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} + h_2 \frac{E_2}{1 - \nu_2^2}\right)\varepsilon_{xx}. \qquad (18)$$

Среднее напряжение и деформация в уравнении (3.26) связаны с модулем упругости и коэффициентом Пуассона следующим выражением:

$$\frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Поэтому,

$$\frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{1}{h}\left(h_1 \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} + h_2 \frac{E_2}{1 - \nu_2^2}\right). \qquad (19)$$

Для определения модуля упругости и коэффициента Пуассона служат формулы (18) и (19), а также соотношение между упругими константами изотропного тела:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Деформации в направлении, перпендикулярном плоскости x и y, определяются по формулам:

$$E = c_1E_1 + c_2E_2 + \frac{c_1c_2E_1E_2(\nu_1 - \nu_2)^2}{c_1E_1(1 - \nu_2^2) + c_2E_2(1 - \nu_1^2)}, \qquad (20)$$

$$\nu = \frac{c_1\nu_1E_1(1 - \nu_2^2) + c_2\nu_2E_2(1 - \nu_1^2)}{c_1E_1(1 - \nu_2^2) + c_2E_2(1 - \nu_1^2)}, \qquad (21)$$

где c_1 и c_2 – объёмные доли соответственно поздней и ранней древесины в годичном слое; $c_1 = h_1 / h$ и $c_2 = h_2 / h$.

Процент поздней древесины в древесине сосны в лесонасаждениях европейской части России составляет 20–40 % [13]. Модуль упругости ранней древесины приняли равным единице. Имеется линейная зависимость между плотностью и модулем упругости древесины. При увеличении плотности увеличивается модуль упругости древесины. Поэтому приняли, что модуль упругости поздней древесины в 2,4–3,0 раза выше, чем модуль упругости ранней древесины. Рассчитали значения условного модуля упругости пластины при изгибе. Модуль упругости пластины считаем условным, так как модуль упругости ранней древесины принят равным единице. Нашли модуль упругости пластины в плоскости годичных слоёв и в плоскости, перпендикулярной годичным слоям. Результаты расчётов приведены в табл. 1.

Среднее значение условного модуля упругости пластины при изгибе в плоскости годичных слоев равняется 1,51, а при изгибе в плоскости перпендикулярной годичным слоям – 1,24. Условный модуль упругости пластины при изгибе в плоскости годичных слоев на 22 % больше условного модуля упругости при изгибе пластины в плоскости перпендикулярной годичным слоям. Имеется взаимосвязь между модулем упругости и пределом прочности древесины.

По данным ЦНИИ механической обработки древесины [14] для сосновых и еловых пиломатериалов при влажности 11–14 % между модулем упругости и пределом прочности древесины существует зависимость, выражаемая уравнением:

"σ" _"изг." "= 5,5E-9,"

где E – модуль упругости древесины, ГПа; "σ" _"изг." – предел прочности древесины, МПа.

Среднее значение условного модуля упругости пластины при изгибе в плоскости годичных слоев равняется 1,51, а при изгибе в плоскости перпендикулярной годичным слоям – 1,24. Условный модуль упругости пластины при изгибе в плоскости годичных слоев на 22 % больше условного модуля упругости при изгибе пластины в плоскости перпендикулярной годич-

ным слоям. Имеется взаимосвязь между модулем упругости и пределом прочности древесины. По данным ЦНИИ механической обработки древесины [14] для сосновых и еловых пиломатериалов при влажности 11–14 % между модулем упругости и пределом прочности древесины существует зависимость, выражаемая уравнением:

$$"\sigma" _"изг." = 5{,}5E\text{-}9,"$$

где E – модуль упругости древесины, ГПа; "σ" _"изг." – предел прочности древесины, МПа.

Таким образом можно заключить, что прочность пиломатериалов при изгибе в плоскости годичных слоев выше, чем при изгибе в перпендикулярном направлении. Повышение прочностных характеристик элементов конструкций возможно при использовании для изготовления клееных конструкций ламелей радиального способа распиловки, работающих таким образом. Радиальные ламели имеют угол наклона элементов годичных слоев к пласти ламелей не менее 60° (рис. 4).

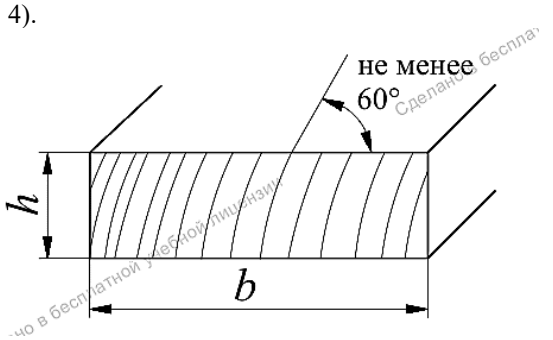

Рис. 4. Схема расположения элементов годичных слоев в радиальных ламел

Таблица 1. Значения условного модуля упругости пластины при изгибе в плоскости годичных слоев и в плоскости перпендикулярной годичным слоям

Объёмная доля поздней древесины	Объёмная доля ранней древесины	Модуль упругости ранней древесины	Модуль упругости ранней древесины	Условный модуль упругости при изгибе в плоскости годичных слоев	Условный модуль упругости при изгибе в плоскости перпендикулярной годичным слоям
0,2	0,8	2,4	1	1,28	0,13
		2,5		1,30	0,14
		2,6		1,32	0,16
		2,7		1,34	0,17
		2,8		1,36	0,19
		2,9		1,38	0,20
		3,0		1,40	0,21
0,25	0,75	2,4	1	1,35	0,15
		2,5		1,38	0,17
		2,6		1,40	0,18
		2,7		1,43	0,20
		2,8		1,45	0,22
		2,9		1,48	0,23
		3,0		1,50	0,25
0,3	0,7	2,4	1	1,42	0,17
		2,5		1,45	0,19
		2,6		1,48	0,21
		2,7		1,51	0,22
		2,8		1,54	0,24
		2,9		1,57	0,26
		3,0		1,60	0,28
0,35	0,65	2,4	1	1,49	0,19
		2,5		1,53	0,20
		2,6		1,56	0,22
		2,7		1,60	0,24
		2,8		1,63	0,26
		2,9		1,67	0,28
		3,0		1,70	0,30
0,4	0,6	2,4	1	0,196	0,20
		2,5		0,216	0,22
		2,6		0,236	0,24
		2,7		0,257	0,26
		2,8		0,278	0,28
		2,9		0,299	0,30
		3,0		0,320	0,32
Среднее значение:				**1,51**	**1,24**

Предложено большое количество технологических схем получения радиальных пиломатериалов. А.А. Янушкевичем совместно с А.Г. Карповичем разработана методика составления и расчёта схем раскроя круглых лесоматериалов комбинированным способом на радиальные пиломатериалы для клееных брусьев [15]. В статье [16] А.А. Янушкевич и Д.Л. Рапинчук приводят обоснование этого способа. Н.О. Бегункова признаёт наиболее целесообразным способом раскроя развально-сегментный [17]. Разработана методика расчёта поставов для получения радиальных пиломатериалов. В описании патента на изобретение А.А. Пижуриным и С.Н. Мчедлишвили также приведена развально-сегментная схема раскроя, однако она усовершенствована за счёт получения радиальных пиломатериалов из боковых зон комлевого торца круглых лесоматериалов [18]. В работе [19] Н.И. Батин и А.А. Янушкевич указывают, что радиальные пиломатериалы получают при распиловке круглых лесоматериалов на лесопильных рамах секторным или сегментными способами.

Рассмотрим макроструктуру ламелей, получаемых при раскрое круглых сортиментов. Поперечное сечение круглых сортиментов представляет собой набор коаксиально расположенных колец толщиной, равной толщине годичных колец древесины. Рассмотрен брусово-развальный способ раскроя круглых сортиментов с раскроем бруса симметричным поставом (рис. 5). Ламели в клееных балках испытывают напряжённо-деформированное состояние изгиба нагружением на пласть. Принята гипотеза: величина нормальных напряжений, возникающих при изгибе ламелей, полученных из центральной части поперечного сечения круглых лесоматериалов, меньше величины нормальных напряжений, возникающих в ламелях, полученных из периферийной зоны круглых лесоматериалов.

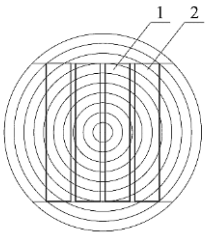

Рис. 5. Схема расположения ламелей при раскрое круглых сортиментов: 1 – центральная ламель; 2 – периферийная ламель

При построении модели ламелей приняли толщину годичных колец одинаковой. Моделью ламели является набор полос толщиной, равной ширине годичного кольца древесины Определено взаимное расположение волокон. Части некоторого одного годичного кольца в соседних ламелях занимают различное положение (рис. 6). Величина нормальных напряжений при напряжённо-деформированном состоянии изгиба определяется по формуле:

$$\sigma=\frac{M}{J}\cdot y,$$

где M – изгибающий момент, кН·м; J – момент инерции, м^4; y – расстояние от точки поперечного сечения до нейтральной оси, м.

Из этой формулы следует, что чем больше момент инерции, тем меньше нормальные напряжения. Рассмотрели полосы одного годичного слоя, расположенные в соседних ламелях, полученных при раскрое круглого сортимента. Одна ламель находится ближе к центру круглого сортимента, другая дальше от него. Полосы, моделирующие элементы годичного слоя, в ламелях имеют разный наклон к пластям ламелей. Рассчитаны моменты инерции полос, моделирующих годичные слои древесины.

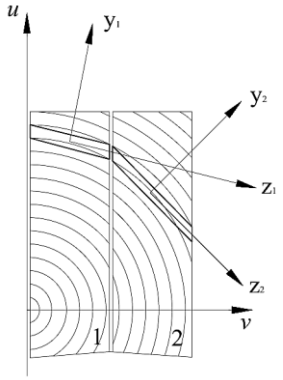

Рис. 6. Схема расположения полос, моделирующих элементы годичного слоя: 1 – центральная ламель; 2 – периферийная ламель; u, v – оси координат параллельные сторонам ламелей; y_1 и z_1 – оси координат полосы, моделирующей элемент годичного слоя древесины в центральной ламели; y_2 и z_2 – оси координат полосы, моделирующей элемент годичного слоя древесины в периферийной ламели

Моменты инерции полосы относительно осей Oz и Oy (рис. 7) рассчитываются по формулам:

$$J_z=\frac{l\cdot t^3}{12} \qquad J_y=\frac{t\cdot l^3}{12},$$

где t – толщина полосы, м; l – длина полосы, м.

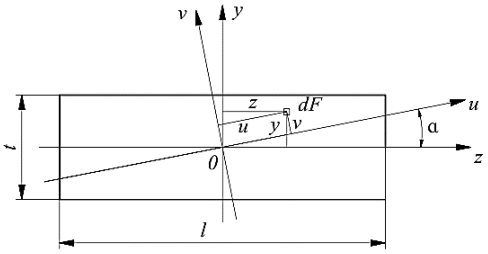

Рис. 7. Схема изменения координат точек полосы при повороте осей координат: t – толщина полосы; l – длина полосы; dF – элементарная площадка; z, y, u, v – расстояния от элементарной площадки до соответствующих осей координат; α – угол поворота новой системы координат $u0v$ относительно исходной системы координат $z0y$

Нашли моменты инерции пластины для осей $0u$ и $0v$, наклоненных относительно исходной системы координат на угол α. Выразили координаты элементарной площадки dF в новых осях через координаты в старых осях:

$$v=y\cos\alpha - z\sin\alpha,$$
$$u=y\sin\alpha + z\cos\alpha.$$

Момент инерции относительно оси 0*u* можно записать в виде

$$J_u = \int_F v^2\,dF = \int_F (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 dF = \cos^2\alpha \int_F y^2\,dF + \sin^2\alpha \int_F z^2\,dF - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_F yzdF.$$

В то же время $\int_F y^2\,dF = J_z$, $\int_F z^2\,dF$, $\int_F yzdF$.

Таким образом $J_u = J_z\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - J_{zy}\sin 2\alpha$.

$J_{zy}\sin 2\alpha$ – центробежный момент инерции. Начало координат полосы, моделирующей элемент годичного слоя, находится в центре масс полосы, поэтому центробежный момент инерции полосы равен нулю. В этом случае,

$J_v = J_z\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha$. Аналогично установили, что $J_u = J_z\sin^2\alpha + J_y\cos^2\alpha$.

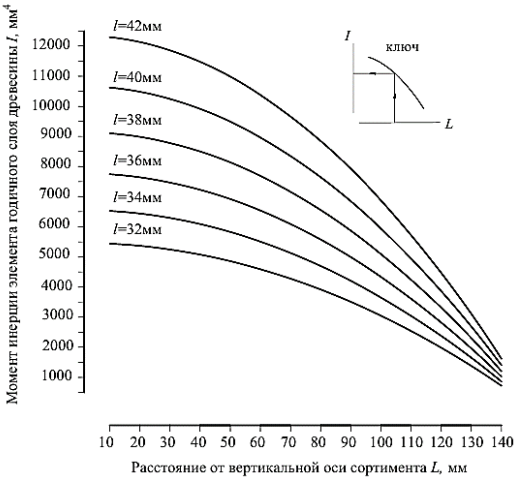

Рис. 8. Номограмма определения моментов инерции полосовых элементов, моделирующих годичные слои древесины: *I* – момент инерции элемента годичного слоя древесины, мм^4; *L* – расстояние от вертикальной оси сортимента до середины толщины ламели, мм; *l* – толщина ламели, мм

Так как нагрузка на ламель при изгибе действует в направлении, перпендикулярном пласти ламели, нас интересует только величина момента инерции относительно оси *u*. Нашли моменты инерции полос относительно осей *y* и *z*. Толщину полосы приняли равной средней толщине годичного слоя древесины 2 мм. Длину полос приняли равной номинальной толщине ламелей 32, 34, 36, 38, 40 и 42 мм. Номограмма определения моментов инерции элементов годичных слоёв древесины в ламелях различной номинальной толщины приведена на рис. 8. Для определения момента инерции полосы принимается расстояние от вертикальной оси сортимента до середины толщины ламелей. Для определения момента инерции полосы принимается расстояние от вертикальной оси сортимента до середины толщины ламелей. Проведено сравнение моментов инерции полос, моделирующих элементы одного и того же годичного слоя древесины в центральной и периферийной ламелях номинальной толщиной 38 мм. Расстояние от центральной оси круглого сортимента до центра симметрии элементов годичного слоя принято равным 150 мм. Продольный раскрой круглого сортимента выполнен симметричным поставом с получением двух центральных досок. Ширина пропилов принята равной 3,6 мм. Формирование поверхностей ламелей выполняется путём фрезерования пластей и кромок досок. Припуск на фрезерование согласно требованиям государственного стандарта «Детали из древесины и древесных материалов. Припуски на механическую обработку» принят равным 5,5 мм. Влажность древесины ламелей – 14±2 %. Припуск на усушку при номинальной толщине ламелей 38 мм в соответствии с требованиями государственного стандарта «Пилопродукция из древесины хвойных пород. Величина усушки» принят равным 1,5 мм. Толщина доски равна 45 мм. Половина толщины доски – 22,5 мм. При симметричном поставе с двумя центральными досками ближние пласти досок располагаются на расстоянии 1,8 мм, что составляет половину ширины пропила. Середина ширины центральной доски находится на расстоянии 24,3 мм от центральной оси сортимента. В этом случае элемент годичного слоя древесины в виде полосы имеет момент инерции равный 8906 мм^4. Середина толщины периферийной ламели отстоит от вертикальной оси сортимента дальше на толщину доски плюс величину пропила, то есть 48,6 мм. Расстояние от вертикальной оси симметрии сортимента до середины толщины периферийной ламели составляет 72,9 мм. В периферийной ламели элемент того же годичного слоя, что и в центральной ламели имеет момент инерции, равный 6991 мм^4. Момент инерции элемента годичного слоя в центральной ламели на 21,5 % больше, чем момент инерции элемента годичного слоя в периферийной ламели. Существует тенденция: момент инерции элемента годичного слоя тем больше, чем ближе ламель находится к вертикальной оси симметрии круглого сортимента. Это подтверждает гипотезу: величина нормальных напряжений при изгибе в ламели, полученной из центральной доски, меньше величины нормальных напряжений, возникающих в ламелях, полученных из периферийной зоны круглых лесоматериалов. Ламели, полученные из центральной части круглых сортиментов – ламели радиального способа распиловки. Ламели из центральной части обладают более высокими прочностными характеристиками.

Заключение. Математическая модель древесины как композитного материала применена при анализе прочностных характеристик пилопродукции радиального способа распиловки и пилопродукции тангенциального способа распиловки. Сравнение прочности элементов клееных конструкций из ламелей, в которых нагрузки действуют в плоскости годичных слоев и в перпендикулярном направлении показало, что при действии нагрузки в плоскости годичных слоёв прочность выше. С некоторой степенью приближения можно предположить, что имеется превышение предела прочности древесины при изгибе пластины в плоскости годичных слоёв над пределом прочности древесины пластины при изгибе в плоскости перпендикулярной годичным слоям на 22 %. Применение радиальных ламелей оказывает влияние на повышение прочности конструкций из клееной древесины.

Литература

1. Ашкенази Е.К. Анизотропия древесины и древесных материалов. М.: Лесн. пром-сть, 1978. 224 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва; Ленинград. Гос. изд-во техн. теорет. лит, 1950. 300 с.
3. Митинский А.Н. Упругие постоянные древесины как ортотропного материала // Труды ЛТА. № 63. Л., 1948. С. 23–54.
4. Глухих В.Н. Упругая деформативность древесины поперёк волокон // Лесной журнал. № 5, 2007. С. 77–83.
5. Ylinen A. Űber den Einflußädes Spätholzanteils und der Rohwichte auf die Elastizitätmoduln, die Poissonischen Konstanten und die Schubmoduln bei Holz mit ausgeprägyen lahrringsbau. Technische Hochschule in Finland. Forschungen № 9. Helsinki, 1956. 26 s.
6. Алфутов Н.А. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с
7. Woodworking. And safe. Boom. Industry. L.: LTA, 1976. Issue 4. P. 39–41.
8. Уголев Б.Н. Древесиноведение и лесное товароведение: учебник. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 272 с.
9. Полубояринов О.И. Плотность древесины. М.: Лесн. пром-сть, 1976. 160 с.
10. Киселева А.В., Хван Ю.Г. Связь между процентом поздней древесины сосны и плотностью её в зоне южной тайги европейской части России // Лесотехнический журнал, 2014. № 1. С. 21–26.
11. Серов Е.Н., Белов В.В. Современная оценка прочности клееных деревянных конструкций // Вестник гражданских инженеров. № 6, 2016. С. 109–113.
12. Zapoev M.A., Romanov N.P., Belyaeva S.V. Features of glued lsminated timber anisotropic structure // Alfabuild, № 4 (6), 2018. С. 83–91.
13. Глухих В.Н., Красильникова С.С. Анализ модуля упругости анизотропного материала на примере древесины // Вестник гражданских инженеров. № 3, 2017. С. 21–26.
14. Кузьмичев В.В. Закономерности роста древостоев. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т леса и древесины им. В.Н. Сукачева. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1977. 160 с.
15. Житушкин В.Г. Зависимость расчётного сопротивления древесины от изменчивости её свойств в дереве // Строительные материалы. № 8, 2011. С. 62–63.
16. Янушкович А.А., Карпович А.Г. Совершенствование технологии распиловки бревен на радиальные пиломатериалы для клееных брусьев // Тр. БГТУ. Сер. II. Лесная и деревообраб. пром-ть. 2019. Вып. VII. С. 262–265.
17. Янушкевич А.А., Рапинчук Д.Л. Обоснование способа распиловки бревен на пиломатериалы для клееных брусьев // Тр. БГТУ. Сер. II. Лесная и деревообраб. промсть. Минск: БГТУ. 1999. Вып. VII. С. 162–164.
18. Бегункова Н.О. Прогнозирование выхода радиальных пиломатериалов // Международный научно-исследовательский журнал. 2021. № 6 (108). Часть I. С. 44–48.
19. Патент 1530443 SU A1: МКП B27B 1/00. Способ получения радиальной пилопродукции из бревен: заявл. 30.03.1987; опубл. 23.12.1989 / Пижурин А.А., Мчедлишвили С.Н.; заявитель: Пижурин А.А.
20. Батин Н.А., Янушкевич А.А. К составлению поставов на распиловку радиальных пиломатериалов // Механическая технология древесины. Минск: Вышэйшая школа, 1971. Вып.1. С. 9–13.
21. Янушкевич А.А. Шетько С.В. Раскрой бревен на радиальные пиломатериалы // Труды БГТУ. Сер. II, Лесная и деревообрабатывающая пром-сть. Минск: БГТУ. 1998. Вып. VI. С. 94–99.

References

1. Ashkenazi E.K. Anisotropy of Wood and Wood Materials. Moscow: Lesnaya Promyshlennost, 1978. 224 p.
2. Lekhnitskij S.G. Theory of elasticity of an anisotropic body. Moscow; Leningrad. State Publishing House of Technical Sciences. the theory. lit, 1950. 300 p.
3. Mitinskij A.N. Elastic constants of wood as an orthotropic material // Proceedings of the LTA. No. 63. L., 1948. P. 23–54.
4. Glukhikh V.N. Elastic Deformation of Wood Across the Fibers // Lesnoy Zhurnal. 2007. No. 5. P. 77–83.
5. Ylinen A. Űber den Einflußädes Spätholzanteils und der Rohwichte auf die Elastizitätmoduln, die Poissonischen Konstanten und die Schubmoduln bei Holz mit ausgeprägyen lahrringsbau. Technische Hochschule in Finland. Forschungen № 9. Helsinki, 1956. 26 s.
6. Alfutov N.A. Calculation of Multilayer Plates and Shells Made of Composite Materials. Moscow: Mashinostroenie, 1984. 264 p.
7. Woodworking. And safe. Boom. Industry. L.: LTA, 1976. Issue 4. P. 39–41.
8. Ugolev B.N. Wood Science and Forest Products: Textbook. Moscow: Publishing Center "Akademiya", 2004. 272 p.
9. Poluboijarinov O.I. Wood density. M.: Lesnaya promyshlennost, 1976. 160 p.
10. Kiseleva A.V., Khvan Ju.G. Relationship between the percentage of late pine wood and its density in the southern taiga zone of European Russia // Lesotekhnichesky Zhurnal, 2014. No. 1. P. 21–26.
11. Serov E.N., Belov V.V. Modern Assessment of the Strength of Glued Wooden Structures // Bulletin of Civil Engineers. No. 6, 2016. P. 109–113.
12. Zapoev M.A., Romanov N.P., Belyaeva S.V. Features of glued lsminated timber anisotropic structure // Alfabuild, № 4 (6), 2018. P. 83–91.
13. Glukhikh V.N., Krasilnikova S.S. Analysis of the Elastic Modulus of Anisotropic Material on the Example of Wood // Bulletin of Civil Engineers. No. 3, 2017. P. 21–26.
14. Kuzmitchev V.V. Patterns of growth of stands. USSR Academy of Sciences. Siberian Branch. V.N. Sukachev Institute of Forests and Timber. Novosibirsk: Nauka. Siberian Branch, 1977. 160 p.
15. Zhitushkin V.G. Dependence of the calculated resistance of wood on the variability of its properties in wood // Construction Materials. No. 8, 2011. P. 62–63.
16. Yanushkovich A.A., Karpovich A.G. Improvement of the technology of sawing logs into radial sawn timber for glued laminated beams // Tr. BGTU. Ser. II. Forest and woodworking industry. 2019. Issue VII. P. 262–265.
17. Yanushkevich A.A. Rapinchuk D.L. Justification of the method of sawing logs into lumber for glued laminated beams // Tr. BGTU. Ser. II. Forest and wood-processing industry. Minsk: BGTU. 1999. Issue VII. Pp 162–164.
18. Begunkova N.O. Forecasting the Yield of Radial Lumber // International Research Journal. 2021. No. 6 (108). Part I. P. 44–48.
19. Patent 1530443 SU A1: IPC B27B 1/00. Method for producing radial sawn timber from logs: applied for 30.03.1987; published 23.12.1989 / Pizhurin A.A., Mchedlishvili S.N.; applicant: Pizhurin A.A.
20. Batin N.A., Yanushkevich A.A. On the preparation of radial lumber sawing patterns // Mechanical Technology of Wood. Minsk: Vysheyshaya Shkola, 1971. Issue 1. P. 9–13.
21. Yanushkevich A.A. Shetko S.V. Cutting logs into radial sawn timber // Proceedings of BSTU. Ser. II, Forest and woodworking industry. Minsk: BSTU. 1998. Issue VI. P. 94–99.