# ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 531.31; 531.36; 531.44 DOI: 10.18324/2077-5415-2026-3-7-16

## Ошибки в обнаружении парадоксов на примерах системы Пенлеве-Аппеля и тормозной колодки

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
kortavik@mail.ru.
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X.
Статья поступила 27.08.2026, принята 14.09.2026.

*Главная ошибка, приводящая к парадоксам, заключалась в допущении возможности только безотрывного скольжения в системах с неидеальными связями. Упускались случаи отсутствия возможности плотного прижатия тела, необходимого для безотрывного скольжения, к опорной поверхности. В таких случаях сила трения, обычно определяемая точно так же, как при безотрывном скольжении, приводила к ошибочным результатам в нахождении реакций. Например, когда тормозную колодку не удаётся плотно прижать к вращающемуся колесу, определяемая реакция не подтверждала направление силы противодействия. Для двухсторонних связей прекращение безотрывного скольжения может происходить в скрытом виде – по отношению к активной стороне, на которую передаётся давление: когда активная сторона становится пассивной из-за изменения направления давления на связь. На примере системы Пенлеве-Аппеля показана ошибочность применяемого метода нахождения реакций со стороны неидеальных двухсторонних связей. По аналогии с идеальными связями раньше предполагалось, что значение реакции опоры не зависит от её направления и положения активной стороны связи. Для систем с неидеальными двухсторонними связями предложена новая методика определения реакций, где учитывается возможность изменения положения активной стороны связи и влияние момента силы трения скольжения на прижимную силу. Установлено, что изменение направления скольжения или активной стороны связи приводит к конвертированию реакции – в её аналитическом выражении сумма слагаемых заменяется на их разность или наоборот. Конвертируемость реакций и необходимость сохранения баланса моментов от приложенных сил делает систему саморегулируемой в выборе стороны связи, прижатие к которой не препятствует скольжению ползуна. Описаны фрикционные колебания системы, в том числе и при коэффициентах трения, превышающих критическое значение. Ранее обнаруженные парадоксы являются следствием неверно найденных реакций при нарушении безотрывного скольжения. Для тормозной колодки показаны допускавшиеся ошибки в существующих доказательствах отсутствия парадокса, а сам парадокс признан надуманным.*

**Ключевые слова:** сухое трение; неидеальные связи; парадоксы Пенлеве; система Пенлеве-Аппеля; фрикционные колебания; тормозная колодка.

## Errors in detecting paradoxes using the Painlevé-Appell system and a brake pad as examples

V.A. Koronatov

Brotherly state university, Makarenko St., 40, Bratsk, Russia
kortavik@mail.ru.
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X.
Arrived 27.08.2026, accepted 14.09.2026.

*The main mistake leading to the paradoxes was to assume that only continuous sliding was possible in systems with imperfect connections. Cases of the absence of the possibility of tightly pressing the body against the support surface necessary for continuous sliding were overlooked. In such cases, the frictional force, which is usually determined in the same way as in the case of non-separating sliding, led to erroneous results in determining the reactions. For example, when the brake pad cannot be firmly pressed against the rotating wheel, the observed reaction does not confirm the direction of the opposing force. For two–way connections, the termination of continuous sliding can occur in a hidden form - in relation to the active side to which pressure is transmitted: when the active side becomes passive due to a change in the direction of pressure on the connection. Using the example of the Painlevet-Appel system, the fallacy of the method used to find reactions from imperfect two-way connections is shown. By analogy with ideal connections, it was previously assumed that the value of the support reaction does not depend on its direction and the position of the active side of the connection. For systems with imperfect two-way connections, a new method for determining reactions is proposed, which takes into account the possibility of changing the position of the active side of the connection and the influence of the moment of sliding friction on the downforce. It is established that a change in the direction of sliding or the active side of the bond leads to a conversion of the reaction – in its analytical expression, the sum of the terms is replaced by their difference or vice versa. The convertibility of reactions and the need to maintain a balance of moments from the applied forces makes the system self-regulating in choosing the side of the connection, pressing against which does not prevent*

*the slider from sliding. The frictional vibrations of the system are described, including those with friction coefficients exceeding a critical value. The previously discovered paradoxes are the result of incorrectly found reactions in violation of continuous sliding. For the brake shoe, the errors made in the existing proofs of the absence of the paradox are shown, and the paradox itself is recognized as far-fetched.*

**Keywords:** dry friction; imperfect connections; Painlevet paradoxes; Painlevet-Appel system; friction vibrations; brake pad.

**Введение.** Вопрос о возникновении парадоксов для систем с сухим трением впервые был поставлен Полем Пенлеве в его книге «Лекции о трении» [1], изданной в 1895 году. В ней в качестве примеров было рассмотрено несколько систем, из уравнений которых могли следовать такие решения, которые либо противоречивы по содержанию, либо имеют двойственную неоднозначность. Такие неожиданные результаты, не характерные для задач механики, со временем стали называться парадоксами Пенлеве. Их обнаружение вызвало большой интерес и послужило предметом знаменитой дискуссии с участием выдающихся учёных того времени [1–6]. Результаты дискуссии свелись к выводу, что парадоксы устраняются, если отказаться от модели абсолютно твёрдого тела и ввести конечную жёсткость, а затем в полученных решениях перейти к пределу, устремив жёсткость к бесконечности. Такой подход был реализован для системы Пенлеве-Клейна [4, 7–11] и тормозной колодки [11, 12]. В дополнение к этому предпринимались попытки решения проблемы с помощью закона о трении, вводя новый закон [13] или обобщая существующий на случаи непоступательного скольжения [14]. А также с помощью удара трением, который мог возникать в момент прижатия тела к быстродвижущейся опоре (например, к вращающемуся колесу [15]) или при сообщении телу заданной начальной скорости в направлении, препятствующем скольжению [16, 17]. Следует отметить ещё две работы, где опровергался парадокс для тормозной колодки: на элементарном уровне без дополнительных гипотез в [18] и с помощью лагранжева формализма в [19]. Хотя эти работы часто цитируемы, но обоснованность приведённых в них доказательств вызывает сомнения – о чём подробнее будет сказано ниже. Для систем с несколькими степенями свободы в [20] были сформулированы критерии для обнаружения парадоксов Пенлеве, что казалось давало новые возможности в изучении таких систем. Системы, где обнаруживаются парадоксы, было предложено называть системами Пенлеве [16, 17]. В таких системах имеется хотя бы одно тело скольжения по односторонней или двухсторонней неидеальной связи. До сих пор считалось, что скольжение по односторонней связи может быть только безотрывное, а у двухсторонней связи положение активной стороны, на которую передаётся давление, не влияет на определение реакции и поэтому это положение не уточнялось. Такие допущения позволяли составлять уравнения движения, используя закон о трении скольжения, и находить реакции опор аналогично тому, как это делается для идеальных связей.

Сложности в виде парадоксов Пенлеве стали обнаруживаться при нарушении баланса моментов от приложенных сил относительно центра масс системы, когда прекращается безотрывное скольжение тела по односторонней связи или по текущей активной стороне у двухсторонней. Для односторонней связи это приводит к отрыву тела от опорной поверхности, а для двухсторонней – к изменению положения активной стороны связи. В первом случае нельзя использовать закон Амонтона-Кулона при нахождении реакции связи, которая определяется через силу трения скольжения, а во втором – реакцию нужно пересчитывать, изменив положение активной стороны связи. Существующее правило, использующее аналогию в нахождении реакций со стороны идеальных связей, не учитывало отмеченного, и поэтому возникали количественные и качественные ошибки. Такие ошибки становятся наиболее заметными при значениях коэффициента трения не меньших некоторой величины, называемой критической, и силе противодействия со стороны опоры, имеющей вид спусковой реакции, названной так [16, 17] из-за того, что обнаруженные парадоксы «запускались» только при ней. Именно в таких случаях нарушается плотное прижатие тела к опорной поверхности, а найденные реакции не подтверждают направление силы противодействия, принимая отрицательные значения или становясь бесконечно большими. Такая недостоверная реакция для односторонних связей сразу указывала на парадокс, а для двухсторонних – после нахождения решений дифференциальных уравнений. В дальнейшем, чтобы не повторяться, будем считать, что нарушение безотрывного скольжения для двухсторонней связи должно пониматься в указанном смысле – при изменении положения её активной стороны. Не искажая действительность в том, что для двухсторонней связи нарушение безотрывного скольжения на самом деле происходить не может: скользящее тело, например, ползун, сохраняя контакт с обеими сторонами связи, может менять направление своего давления, делая пассивную сторону активной. Такое будет называться скрытым прекращением безотрывного скольжения по двухсторонней связи, по её активной стороне.

Вышесказанное даёт основания усомниться в правильности выбранного пути устранения парадоксов отказом от модели абсолютно твёрдого тела или изменения закона о трении. Причина видится в ином: в неправильно найденных реакциях со стороны неидеальных связей. И в частности, в тех случаях, когда для скользящего тела не удаётся добиться плотного прижатия к односторонней связи или сохранить направление давления на текущую активную сторону двухсторонней связи. Визуально это можно наблюдать в системах с односторонней связью, например, для тормозной системы [21], когда не удается плотно прижать колодку к быстро вращающемуся колесу. В системах с двухсторонней связью подобное «неприжатие» визуально незаметно: ползун, сохраняя контакт с обеими сторонами связи, меняет направление своего давления, а значит и активную сторону. Здесь следует подчеркнуть, что все ранее обнаруженные парадоксы возникали как раз в случаях нарушения безотрывного скольжения тел. Такие нарушения не замечались, и для определения неизвестной реакции использовались обычные уравнения безотрывного скольжения. Причём для двухсторонних связей, в отличие от

односторонних, отрицательные значения реакции считались вполне допустимыми результатами (например, в [1–13, 18–22]) – по аналогии с идеальными связями. Как будет показано ниже, такая аналогия оказалась ошибочной.

В данной работе даётся полное отрицание парадоксов на примере системы Пенлеве-Аппеля и тормозной колодки – самой простой среди подобных систем, а также несогласие с существующими вариантами доказательства этого в [18, 19]. Даны уточнения количественного и качественного характера, показывающие ошибочность обычного подхода в нахождении реакций со стороны неидеальных двухсторонних связей. Показано, что при изменении положения активной стороны у двухсторонней связи возникающая реакция меняется не только по направлению, но и по значению тоже. При описании систем Пенлеве с двухсторонними связями неверный подход приводил к ошибкам, которые постоянно стали повторяться буквально во всех работах. В недавних статьях автора [16, 17] были исправлены такие ошибки, что позволило опровергнуть возможность парадоксов для системы Пенлеве-Клейна.

На основании сделанных уточнений была предложена совершенно новая методика нахождения реакций со стороны двухсторонних неидеальных связей в системах Пенлеве. Она является обобщением подхода, применяемого в выше названных статьях [16, 17]. Применение методики показано на примере системы Пенлеве-Аппеля, для которой были исправлены ошибки в нахождении реакций и как следствие парадоксы, обнаруженные в работах [1, 6, 22], не подтвердились. Дано описание фрикционных колебаний системы с показом динамики изменений положения активной стороны двухсторонней связи.

Изменившееся понимание работы неидеальных связей позволило по-новому взглянуть на ранее упомянутые статьи [18, 19] об отсутствии парадокса Пенлеве для тормозной колодки и не согласиться с приведёнными в них доказательствами. В этих статьях закон о трении скольжения использовался при нарушении безотрывного скольжения, когда он был неприменим.

**Количественные особенности неидеальных связей.** Реакция со стороны односторонней связи всегда направляется в сторону противодействия опоры, т. е. в сторону внешней нормали к ней. Противоположное направление реакции должно отбрасываться как нереальное. Двухсторонние связи – это фактически две жёстко связанные односторонние связи, которые образуют параллельные друг другу стороны ограничений. У двухсторонней связи одна из сторон будет активная, как воспринимающая давление, а вторая – пассивная, на которую в текущий момент давление не передаётся, хотя контакт тела с ней не может нарушаться. Реакция возникает только со стороны активной стороны связи, и она определяется также, как если бы эта сторона являлась односторонней связью. Только у двухсторонней связи нужно знать положение активной стороны – например, вверху она или внизу, что обычно заранее неизвестно. В случае правильного выбора положения активной стороны значение нормальной составляющей реакции должно быть только положительным и конечным, а в случае неверного выбора – отрицательным или равным бесконечности. Возможность реакции принимать недопустимые значения должна указывать на необходимость поменять местами активную и пассивную стороны связи. Недопустимые значения – отрицательное или бесконечно большое значение, находились из уравнений безотрывного скольжения в тех случаях, когда плотного прижатия тела к односторонней опоре или к текущей активной стороне двухсторонней связи достичь не удавалось (как, например, в [1–13, 18–22]). Изменение значения нормальной составляющей реакции при смене положения активной стороны у двухсторонней связи объясняется влиянием момента силы трения скольжения на прижатие тела к опоре.

Для определенности в дальнейшем будет считаться, что стороны двухсторонней связи параллельны горизонтальной оси $x$, а направление, перпендикулярное к ним, определяется осью $y$. Учитывается, что значение нормальной составляющей реакции $N_{sgnR_y}$ зависит от её направления:

$$N_{sgnR_y} = \begin{cases} N_+, \ if \ R_y > 0; \\ N_-, \ if \ R_y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $N_+ > 0, \ N_- > 0 \ \left(N_+ \neq N_-\right)$ – значения реакции соответственно в положительном и отрицательном направлении оси $y$, $R_y$ – проекция реакции связи на ось $y$. С учетом этого проекция $R_y$ определяется так:

$$R_y = N_{sgnR_y} \, sgn R_y = \begin{cases} N_+, \ if \ R_y > 0; \\ -N_-, \ if \ R_y < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что для односторонних связей следует учитывать только одно значение $N_+$ или $N_-$. В системах Пенлеве нормальная составляющая реакции связи обычно находится из уравнения, выражающего баланс моментов от приложенных сил, по формуле:

$$N_{sgnR_y} = \frac{G}{a - fb \, sgn R_y \, sgn \dot{x}}, \tag{3}$$

где $f$ – коэффициент трения скольжения; $G$ – сила прижатия тела к опоре; $\dot{x}$ – скорость скольжения тела; $a, b$ – заданные или определяемые постоянные величины. Частные случаи формулы (3) могут соответствовать либо спусковой реакции:

$$N_{sgnR_y} = \frac{G}{a - fb}, \tag{4}$$

названной так в [15, 16] из-за того, что при реакциях такого вида возникает возможность «запуска» качественно нового состояния системы, прекращающего безотрывное скольжение и приводящего к парадоксам; либо обычной

$$N_{sgnR_y} = \frac{G}{a + fb}, \tag{5}$$

при которой безотрывное скольжение нарушаться не может. Приведённые формулы (3)–(5) говорят о том, что

реакция (3), изменяя свой знаменатель на сумму слагаемых или их разность, будет конвертироваться в спусковую реакцию (4) или обычную (5). Это происходит, согласно формуле (3), при изменении направления скорости скольжения или нормальной составляющей реакции связи, когда меняется положение её активной стороны. В дальнейшем будем иметь в виду следующее:

1. Приведённая формула (3) и её частные случаи (4) и (5) в каждом конкретном примере получаются при использовании закона о трении скольжения, что предполагает выполнение необходимых условий его применения. В противном случае теряется обоснованность таких формул и делать какие-либо выводы, ссылаясь на них, будет нельзя.

2. Необходимым условием применения закона о трении является соблюдение безотрывного скольжения тела по поверхности односторонней связи, когда давление тела на опору не исчезает, т.е. при $N_+ > 0$ или $N_- > 0$. Именно при таком скольжении, когда даже кратковременные отрывы тела от опорной поверхности исключались, устанавливался закон о трении эмпирическим путём [23]. Выполнимость такого безотрывного скольжения можно устанавливать, проверяя сохранение баланса моментов от приложенных сил относительно цента масс системы. В отличие от односторонней, у двухсторонней связи такая проверка должна делаться для текущей активной стороны. Только она позволяет устанавливать не возможность отрыва тела от связи – такой отрыв здесь невозможен, а способность сохранять непрерывность давления в направлении текущей активной стороны, исключая тем самым возможность изменения ее положения.

3. Возможность безотрывного скольжения тела, а значит и справедливость формулы (4) допускается только при $f < f_*$, где $f_* = a/b$ – критическое значение коэффициента трения, начиная с которого баланс моментов от приложенных к телу сил становится невозможным и безотрывное скольжение прекращается.

4. Прекращение безотрывного скольжения тела, а значит и невозможность применения формулы (4) будет при $f \geq f_*$, когда происходит явный отрыв тела от односторонней связи или скрытый – у двухсторонней.

Часто допускаемой ошибкой в нахождении реакции со стороны двухсторонних связей, приводящей к парадоксам, являлось предположение о допустимости отрицательного значения реакции, т.е. что при $f > f_*$ может $N_+ < 0$ или $N_- < 0$ (как, например, в [1, 6–13, 18, 21, 22]). Другая часто встречающаяся ошибка – это нахождение силы трения скольжения со стороны неидеальной связи по формуле $F = -f\left|R_y\right| sgn\,\dot{x}$ (как в [1, 6–13, 18, 21, 22], где по аналогии с идеальными связями, ошибочно считалось $N_+ = N_- = N$ и $R_y = \pm N$).

Интересно отметить, что в формуле (4) раньше допускались любые значения коэффициента трения, так как возможность нарушения безотрывного скольжения не предполагалась. Неверные результаты при $f \geq f_*$ воспринимались как парадоксы Пенлеве, на обсуждение которых ушло уже более 130 лет. Правильнее было их называть не парадоксами, а ошибками Пенлеве.

**Качественные особенности неидеальных связей.** Значение нормальной составляющей силы реакции со стороны неидеальной односторонней связи зависит от влияния момента силы трения скольжения относительно центра масс системы на прижатие тела к опоре. Такой момент может либо увеличивать значение $N_{sgnR_y}$, либо наоборот его уменьшать, при совпадении или несовпадении направления моментов от сил прижатия и трения скольжения. В первом случае будет возникать спусковая реакция (4), а во втором – обычная (5), что хорошо заметно при торможении колодкой [21].

Вышесказанное для односторонних связей следует распространить на активную сторону двухсторонней связи. Здесь следует иметь в виду, что смена активной стороны связи может происходить только в момент конвертирования обычной реакции (5) в спусковую (4) при смене направления скольжения и только когда $f \geq f_*$. В этом случае из-за невозможности безотрывного скольжения по текущей стороне связи, ползун меняет активную сторону на противоположно расположенную и снова конвертируется в обычную реакцию (5). Что позволяет ползуну продолжить безотрывное скольжение по изменившейся активной стороне, сохраняя новое направление скольжения. И показывает механизм смены положения активной стороны связи, что делается впервые. На необходимость уточнения стороны прижатия двухсторонней связи ползуном, обращали внимание еще Клейн и Прандтль [1], пытаясь объяснить парадокс для системы Пенлеве-Клейна.

Изменение положения активной стороны связи регулируется самой системой, заставляя скользить ползун по той стороне, на которой достижимо безотрывное скольжение. Саморегулирование создаётся необходимостью поддержания баланса моментов от приложенных сил, включая и инерционные. В моменты прекращения безотрывного скольжения давление, создаваемое ползуном, передаётся на другую сторону связи, делая её активной. Возможность продолжения безотрывного скольжения ползуна по противоположно расположенной стороне связи создаётся уже новым балансом моментов от приложенных сил – он возникает сразу же из-за взаимосвязи силы трения скольжения и нормальной составляющей реакции, которая конвертируется. При $f < f_*$ ползун может безотрывно скользить только по одной из двух сторон связи, без возможности смены текущей активной стороны. В системах Пенлеве первоначально активная сторона должна задаваться дополнительным начальным условием.

**Тест на возможность безотрывного скольжения.** Одно из уравнений, с помощью которого определяется реакция неидеальной связи, выражает баланс моментов от приложенных и инерционных сил. Этот баланс, определяющий возможность безотрывного скольжения тела при $f < f_*$, может нарушаться при $f \geq f_*$. В случае нарушения безотрывного скольжения силу трения скольжения определять, используя закон Амонтона-Кулона, становится уже нельзя, а значит и силу реакции связи тоже. Поэтому при рассмотрении систем Пенлеве

необходимо предварительно устанавливать при каких коэффициентах трения безотрывное скольжение будет возможно, а при каких нет. Для установления этого можно использовать такой проверочный тест:

1) записывается уравнение баланса моментов от приложенных сил относительно центра масс, полагая осуществимость безотрывного скольжения тела;

2) возможность безотрывного скольжения определяется по виду силы реакции, найденной из такого уравнения: если её вид соответствует спусковой реакции (4), то безотрывное скольжение будет происходить при $f < f_*$; если она похожа на обычную реакцию (5), то скольжение будет безотрывным при любом значении коэффициента $f$.

В случае прекращения безотрывного скольжения тела, что может произойти при спусковой реакции (4) и когда $f \geq f_*$, возможны такие варианты:

– в системах с односторонней связью – задача меняется из-за возникновения отрывов тела от опоры;

– в системах с двухсторонней связью – постановка задачи сохраняется и решается она уже без ожиданий возникновения парадоксов, поменяв местами пассивную и активную стороны.

**Фрикционные колебания системы Пенлеве-Аппеля.** Система Пенлеве-Аппеля – это эллиптический маятник, где ползун совершает фрикционные колебания.

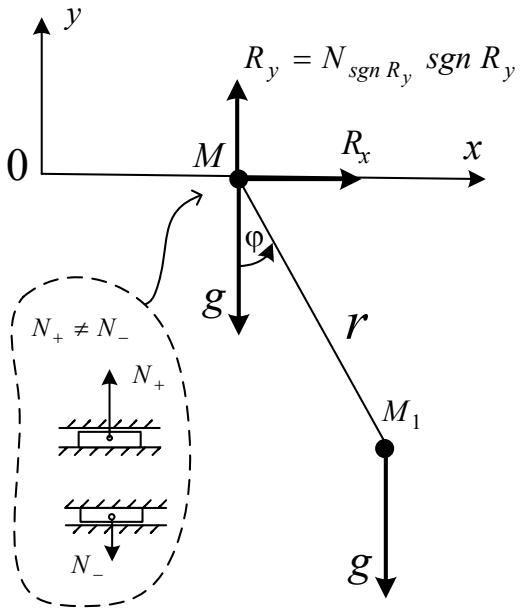



**Рис. 1.** Система Пенлеве-Аппеля $(\dot{x} < 0)$

Такая система (рис. 1) представляет собой невесомый жёсткий стержень $MM_1$ длины $r$, связывающий между собой две материальные точки с единичными массами. Точка $M$ (ползун) может скользить вдоль горизонтальной оси $x$, которая считается двухсторонней связью, а точка $M_1$ вместе со стержнем могут поворачиваться, оставаясь в вертикальной плоскости $0xy$; угол отклонения $\varphi$ отсчитывается от вертикального положения стержня в направлении против часовой стрелки. Считается, что точка $M_1$ не может оказаться выше оси $x$, т. е. $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Сила трения скольжения $R_x$, действующая на ползун, определяется согласно закону Амонтона-Кулона, который применительно к неидеальным двухсторонним связям запишется так:

$$R_x = -fN_{sgnR_y}\ sgn\dot{x},\ if\ \dot{x} \neq 0, \tag{6}$$

где значение реакции $N_{sgnR_y}$, определяемое с учётом положения активной стороны связи по формуле (1).

Для описания этой системы предпочтение отдано в пользу привычной правосторонней системы координат, хотя общепринято было это делать в левосторонней системе [1, 6]. Пусть $x, x_1, y_1$ – координаты соответственно для материальных точек $M$ и $M_1$, тогда уравнения для системы $MM_1$ запишутся так:

$$\begin{cases} \dot{x} \neq 0: \\ \ddot{x} + \ddot{x}_1 = R_x, \\ x_1 = x + r\sin\varphi, \\ \ddot{y}_1 = R_y - 2g, \\ y_1 = -r\cos\varphi, \\ \dfrac{r^2}{2}\ddot{\varphi} = -\dfrac{r}{2}\left(R_x\cos\varphi + R_y\sin\varphi\right). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} \neq 0: \\ 2\ddot{x} + r\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = R_x, \\ r\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = R_y - 2g, \\ r\ddot{\varphi} = -\left(R_x\cos\varphi + R_y\sin\varphi\right). \end{cases} \tag{7}$$

С учётом введённых формул (1), (2), закона о трении (6) и $sgn\,R_x = -sgn\,\dot{x}$, $R_x / R_y = f\,sgn(R_x R_y)$ из двух последних уравнений системы (7) находим

$$R_y = \begin{cases} N_+ = \dfrac{2g + r\dot{\varphi}^2\cos\varphi}{D(sgn\,R_x)}, \\ \qquad if\ R_y > 0,\ D(sgn\,R_x) > 0; \\ -N_- = \dfrac{-\left(2g + r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)}{D(-sgn\,R_x)}, \\ \qquad if\ R_y < 0,\ D(-sgn\,R_x) > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь принято обозначение: $\sigma = sgn(R_y R_x)$ и введена вспомогательная функция:

$$D(\sigma) = 1 + \sin^2\varphi + \sigma f\sin\varphi\cos\varphi = \begin{cases} 1 + \sin^2\varphi + sgn\,R_x f\sin\varphi\cos\varphi,\ if\ R_y > 0, \\ 1 + \sin^2\varphi - sgn\,R_x f\sin\varphi\cos\varphi,\ if\ R_y < 0. \end{cases} \tag{9}$$

При нахождении нормальной составляющей реакции $R_y$ её направление должно подтверждать направление внутренней нормали к текущей активной стороне связи и иметь конечное значение, что достижимо только при

$D(\sigma)>0$. В противном случае возникнет необходимость изменения положения активной стороны связи. Вид реакции (8) определяется так: при $R_y>0$, если $R_x>0$, то $R_y$ - обычная реакция; а если $R_x<0$, то $R_y$ – спусковая реакция; при $R_y<0$ – будет наоборот.

Уравнения системы (7) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{x}\neq 0: \\ D(\sigma)R_y=\left(2g+r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)sgn\,R_y \\ D(\sigma)r\ddot{\varphi}=-\left(2g+r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\left(\sin\varphi+f\sigma\cos\varphi\right) \\ D(\sigma)\ddot{x}=r\dot{\varphi}^2\left(\sin\varphi+f\sigma\cos\varphi\right)+ \\ \qquad g\left[\cos\varphi\sin\varphi+f\sigma\left(1+\cos^2\varphi\right)\right] \end{cases} \tag{10}$$

с начальными условиями: $x_0, \dot{x}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0, \left(sgn\,R_y\right)_0$, где $\left(sgn\,R_y\right)_0$ определяет начальное положение активной стороны связи. Дополнительно к уравнениям системы (10) можно записать уравнение:

$$\ddot{x}\cos\varphi+r\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0. \tag{11}$$

Считая, что $F_1$ – предельное значение силы трения покоя, движение системы Пенлеве-Аппеля во время возможных кратковременных остановок ползуна будет описываться такой системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}\equiv 0: \\ R_x\in\left[-F_1;F_1\right], \\ r\ddot{\varphi}=-g\sin\varphi, \\ R_x=-\sin\varphi\left(g\cos\varphi+r\dot{\varphi}^2\right) \end{cases} \tag{12}$$

Уравнения системы (10) справедливы только, когда $D(\sigma)>0$, т. е. при $D(+1)>0$ и $D(-1)>0$. Поэтому важно знать при каких $f$ и $\varphi$ это будет выполнимо. Вспомогательную функцию $D(\sigma)$ можно выразить в виде квадратного трёхчлена $2tg^2\varphi+f\sigma tg\varphi+1$, корни которого равны $(tg\varphi)_{1,2}=\dfrac{-f\sigma\pm\sqrt{f^2-8}}{4}$. Приняв за критический коэффициент трения $f_*=2\sqrt{2}$, получим:

1. $f<f_*$: $D(\sigma)>0$ при любом $\varphi\in(-\pi/2,\pi/2)$.
2. $f\geq f_*$:

$D(+1)>0$ при $\varphi\in(-\pi/2,\varphi_1)\cup(\varphi_2,\pi/2)$, где

$$\varphi_1=arctg\left(-\left(f+\sqrt{f^2-8}\right)/4\right);$$

$$\varphi_2=arctg\left(-\left(f-\sqrt{f^2-8}\right)/4\right).$$

$D(-1)>0$ при $\varphi\in(-\pi/2,\varphi_3)\cup(\varphi_4,\pi/2)$, где

$$\varphi_3=-\varphi_2;\ \varphi_4=-\varphi_1.$$

Изменение функций $D(+1)$ и $D(-1)$ в зависимости от угла $\varphi$ показано на графиках (рис. 2).

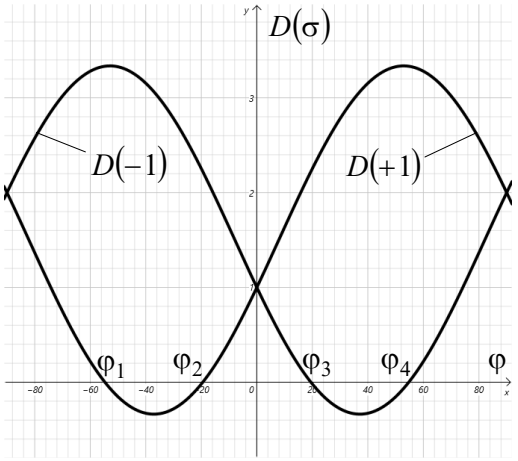



**Рис. 2.** Графики функции $D(\sigma)$ при $f\geq f_*=2\sqrt{2}$

Здесь нужно иметь в виду, что при $D(\sigma)\leq 0$ значение реакции $N_+$ конвертируется в $N_-$ или наоборот, с изменением положения активной стороны связи. Раньше при $D(\sigma)\leq 0$ реакция связи определялась из уравнений (7) безотрывного скольжения ползуна, без учета положения активной стороны и конвертирования реакции – что приводило к ошибкам и парадоксам.

**Кратковременные остановки ползуна.** Кратковременные остановки ползуна описываются системой уравнений (12), которые следует ожидать в окрестностях углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, а смену направления скольжения – в моменты, когда маятник отклонится в свое крайне левое или правое положение – здесь тоже возможны остановки: либо мгновенная при смене направления скорости скольжения, либо кратковременная, либо окончательная – когда эллиптический маятник становится обычным маятником.

Фрикционные колебания системы Пенлеве-Аппеля описываются системами уравнений (10) и (12), а варианты возможных прижатий ползуна к нижней или верхней направляющей связи показаны на рис. 3.

**Сценарии развития колебаний ползуна.** Колебания ползуна зависят от диапазона значений коэффициента трения: когда $f<f_*$ или $f\geq f_*$ и начальных условий: $t=0: x_0, \dot{x}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0, \left(sgn\,R_y\right)_0$. Немаловажную роль играет, к какой стороне связи будет прижат ползун, что раньше во внимание не принималось.

Если $f<f_*$, то ползун будет совершать обычное колебательное движение по нижней или верхней стороне связи, в зависимости от значения $\left(sgn\,R_y\right)_0$. Эта начальная сторона, как уже отмечалось выше, будет оставаться активной во время всего колебательного движения. Раньше учитывалось давление ползуна только на нижнюю сторону связи, а возможность давления на верхнюю сторону упускалась. Наиболее интересен случай колебаний при $f\geq f_*$, когда раньше обнаруживался парадокс Пенлеве, он показан на рис. 3. На четырех схемах рис. 3 показаны возможные варианты прижатия ползуна к одной из двух сторон связи с указанием значений возникающих реакций и графиков, показывающих при ка-

ких углах $\varphi$ функция $D(\sigma)>0$. Сценарии развития колебаний ползуна существенно зависят от начальных условий $x_0, \dot{x}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0, (sgn R_y)_0$ и найденных углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, когда $D(\sigma)=0$. На рис. 3 схема: а) будет считаться похожей на схему с), а также схема б) похожей на схему д), так как они отличаются друг от друга только неодинаковым положением активной стороны связи.

При описании сценария развития колебаний ползуна будем придерживаться такого плана:

1. По начальным условиям: $x_0, \dot{x}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0, (sgn R_y)_0$ определяем, какая из четырёх схем на рис. 3 будет отвечать выбранному случаю начала скольжения ползуна. Например, это будет схема а), а движение ползуна и маятника начинаются вблизи их крайнего левого положения, при $\varphi_0 \in (-\pi/2, \varphi_3)$ и $\dot{\varphi}_0 > 0, \dot{x}_0 > 0$, $R_y > 0$.

2. В зависимости от знака функции $D(\sigma)$ уточняем возможность безотрывного скольжения по выбранной стороне связи: если $D(\sigma)>0$, то сторона, задаваемая начальным условием, допустима, и выбранная схема на рис. 3 берётся за основу. Например, если у нас подтверждается нижняя сторона связи для схемы а), то она принимается в качестве основной; если бы основной схемой была с) и $\varphi_0 \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $D(\sigma)\le 0$, то за основу бралась бы схема а) с верхней активной стороной.

3. На выбранной схеме описывается скольжение ползуна до тех пор, пока $D(\sigma)>0$, либо до момента, когда направление скольжения ползуна изменится. Например, у нас скольжение начнется согласно схеме а) когда $\varphi \in (-\pi/2, \varphi_3)$, $D(\sigma)>0$.

4. В момент, когда $D(\sigma)=0$, а точнее вблизи этого положения, переходим к похожей схеме – например, у нас к схеме с), так как при $\varphi=\varphi_3$ : $D(\sigma)=0$. Такой переход будет осуществим через зону кратковременной остановки ползуна в окрестности угла $\varphi_3$, согласно системе уравнений (12).

5. Схема с) описывает безотрывное скольжение ползуна при $\varphi \in (\varphi_3, \pi/2)$ до крайне правого положения ползуна, до тех пор, пока $\dot{x}>0$; после того, как $\dot{x}=0$, направление скольжения изменяется: $\dot{x}<0$.

6. Скольжение ползуна в обратном направлении, когда $\dot{x}<0$, продолжится согласно схеме б) или д). Например, у нас это будет схема д), так как ползун безотрывно скользил по верхней направляющей связи. До момента, когда $D(\sigma)=0$, что произойдет при $\varphi=\varphi_4$, если использовалась схема д); или при $\varphi=\varphi_2$, если использовалась схема б). Кратковременные остановки ползуна ожидаются в окрестности угла $\varphi_4$ или $\varphi_2$.

7. Далее будет переход на схему, похожую на б) или д) – в зависимости от того, какая из них была активной. Например, у нас это будет схема б), в результате чего ползун прижмётся уже к нижней направляющей связи. И так далее до момента остановки ползуна. Каждый раз, когда возникает момент $D(\sigma)=0$, будет выбираться похожая схема, на которой допускается безотрывное скольжение, не забывая при этом о зонах кратковременной остановки ползуна. Процесс будет затухающий: амплитуды колебаний для $x$ и $\varphi$ должны убывать. С дальнейшей перспективой остановки сначала скольжения ползуна, а затем и колебаний маятника.

**Ошибки Пенлеве и Аппеля.** На основании решений, приведённых в [1, 6], автор вынужден обратить внимание на допущенные в них ошибки и неточности, которые заключаются в следующем:

1. Использованная аналогия в нахождении реакций для идеальных связей была ошибочной – значение реакции зависит от её направления, а значит и от положения активной стороны связи.

2. Способность реакции конвертироваться при смене ее направления была не замечена.

3. Активная сторона связи не выделялась – считалось, что значение реакции не зависит от ее положения.

4. Не был замечен физический смысл для $f_*$ : критическое значение коэффициента трения определяет такое значение, начиная с которого баланс моментов от приложенных сил становится невозможным.

5. Реакция двухсторонней связи неправильно определялась при $f \ge f_*$ - это делалось из уравнений безотрывного скольжения, что приводило к получению неверных значений, к тому же еще и отрицательных.

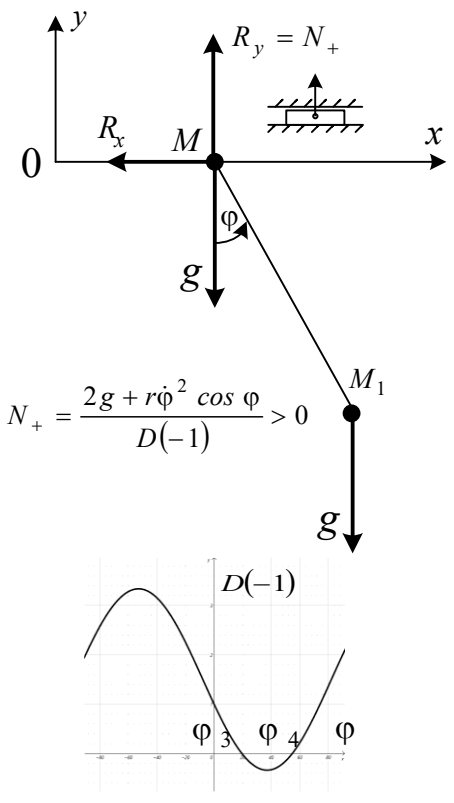
6. Обнаруженные парадоксы – это не парадоксальные результаты, а элементарные ошибки допущенные Пенлеве при $f \ge f_*$ из-за неверно найденных реакций и приводящие к качественно неверным результатам.

7. При $f < f_*$ упускался один из двух возможных вариантов скольжения ползуна – по нижней или верхней направляющей связи.

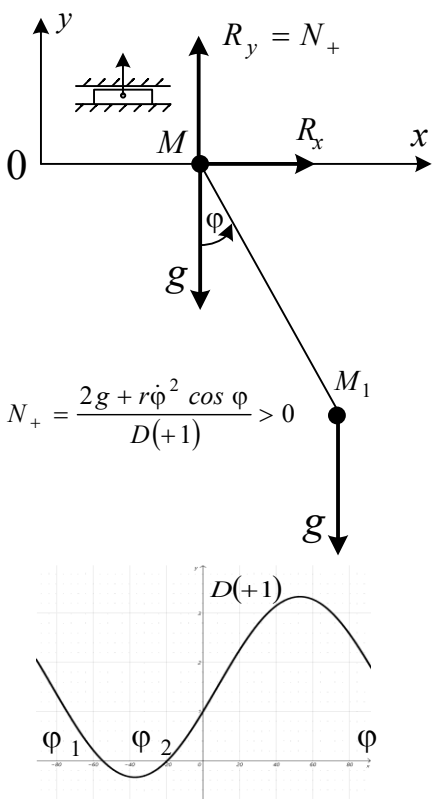
8. В начальных условиях дополнительно к обычным следует указывать положение активной стороны связи – внизу она или вверху.

9. Возможность фрикционных колебаний ползуна допускалась только при $f < f_*$.

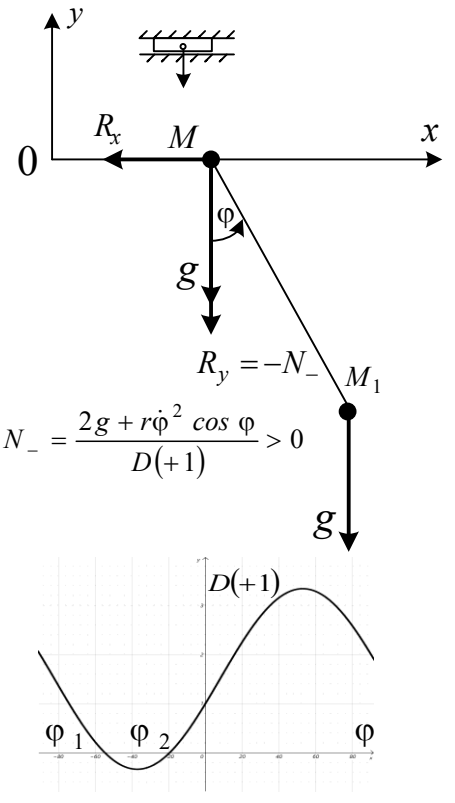
Нарушение баланса моментов раньше не допускалось, не замечалось это и тогда, когда обнаруживались парадоксы. Упускалась особенность систем Пенлеве, которая заключается в том, что баланс моментов для одних и тех же приложенных сил может достигаться при $f < f_*$ и быть невыполнимым при $f \ge f_*$. Поэтому не случайно, когда баланс моментов был недостижим и его нельзя было использовать в качестве уравнения для нахождения реакций, обнаруживались мнимые парадоксы Пенлеве из-за неверно найденных реакций. Такое получалось, когда, не уточнив справедливость исходного уравнения, делались выводы по найденным решениям – именно такие ошибки совершались при обнаружении всех известных парадоксов.



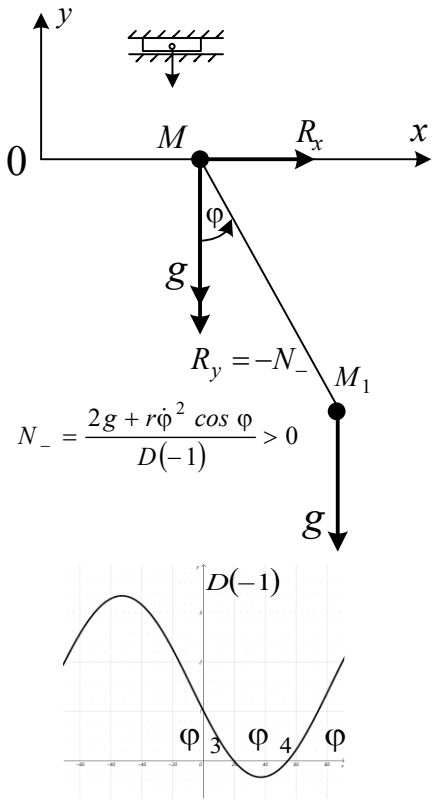

*а)*




*б)*




*с)*




*д)*

**Рис. 3.** Фазы фрикционных колебаний системы Пенлеве-Аппеля при $f \geq f_* = 2\sqrt{2}$

**О существующих доказательствах отсутствия парадокса для тормозной колодки.** В статье В.Ф. Журавлёва [18], как и в других аналогичных работах, баланс моментов от приложенных сил для тормозной колодки при $f \geq f_*$ не подвергался сомнению и тем самым выражалось согласие на возможность безотрывного скольжения колодки по колесу. Но если попытаться проверить это экспериментальным путём, то при вращении колеса в определённом направлении – против часовой стрелки, как и в [18,19,21], добиться плотного прижатия колодки к колесу не удастся – колодка начнёт подскакивать. Что было подтверждено авторами статьи [21] во время экспериментальной проверки: «*…в ходе наблюдений были многократно зафиксированы заклинивания цилиндра, отскоки колодки и преимущественно переходы от заклинивания к отскоку с изменением угловой скорости вращения цилиндра*». Авторы этой статьи так и не увидели, что наблюдаемое далеко не случайно, поэтому чтобы избежать этого, они пытались связать с «*…необходимостью создания установки повышенной жёсткости и минимизации погрешностей изготовления образцов*». Такую невозможность плотного прижатия колодки можно было установить и теоретически, согласно проверочному тесту, который был описан выше. Ошибка В.Ф. Журавлёва заключалась в использовании уравнения безотрывного скольжения колодки, хотя в рассматриваемом случае при $f \geq f_*$, это нельзя было делать, так как безотрывное скольжение становилось невозможным.

Заметим, что аналогичную ошибку совершил и С.С. Григорян в статье [13], где приведено доказательство отсутствия парадокса для скользящего ползуна системы Пенлеве-Клейна при измененном законе о трении.

В статье В.В. Козлова [19] – наоборот, колодка не столь плотно прижата к колесу, поскольку имеет возможность совершать отклонение от равновесного положения, подчиняясь дифференциальному уравнению вращательного движения. Заранее предполагая нарушение безотрывного скольжения, в приведенном доказательстве тем не менее был использован закон о трении скольжения. Что делать было нельзя – необходимое условие для применения закона о трении скольжения не выполнялось. В этом состояла ошибка В.В. Козлова. И наглядный пример того, как раньше на возможность прекращения безотрывного скольжения не обращалось должного внимания.

По мнению автора, вопрос о возникновении парадокса для тормозной колодки оказался совершенно надуманным. Для рассматриваемого случая когда $f \geq f_*$ баланс моментов от приложенных сил был невозможен и поэтому исходное уравнение для нахождения реакции было невыполнимо. А решение – значение искомой реакции, полученное из ложного уравнения, тоже становится ложным и поэтому никак не может считаться парадоксом. Удивительно, что такое весьма очевидное заблуждение оставалось незамеченным долгое время – более чем 45 лет, и прежде всего для самого автора надуманного парадокса. Мнимый парадокс, возникший из-за недопонимания динамики процесса торможения тормозной колодкой, стал часто обсуждаем из-за простоты и наглядности выбранной модели.

А самое первое описание такого «парадокса», послужившее началом для его обсуждения, было сделано в брошюре «Очерки о механике: некоторые задачи, явления и парадоксы» /Самсонов В.А. – М.: Физматлит, 1980. 63 с./. Ссылки на нее, в том числе и в центральных журналах, только укрепляли это заблуждение, ставшее фактически вредоносным вирусом.

**Заключение.** Проведённое исследование показывает, что поиск объяснений парадоксов Пенлеве ограничивался только рассмотрением безотрывного скольжения. Такое ограничение не только не позволяло найти ответы на поставленные вопросы, но и лишало возможности введения новых адекватных моделей. Отказ от модели абсолютно твёрдого тела или изменение закона о трении во всех прежних работах (как, например, в [6-12, 20-22]), подменял задачи Пенлеве на похожие, но фактически уже другие по содержанию. Каждая такая работа являлась очередной попыткой избежать парадоксы Пенлеве и была заранее обречена на неудачу в нахождении причин их появления. Решения искались не для задач Пенлеве, а для других похожих задач. Последствия нарушения безотрывного скольжения – явного и скрытого, были недооценены. Данная работа доказывает отсутствие парадоксов Пенлеве, их обнаружение не подтверждается в каждом конкретном случае. То, что было принято называть парадоксами, следует признать ошибками Пенлеве, возникшие из-за пренебрежения возможности нарушения безотрывного скольжения.

Обоснованно введен новый метод нахождения реакций со стороны двухсторонних неидеальных связей.

Приведены уравнения движения для системы Пенлеве-Аппеля в правосторонней системе координат с поправками замеченных неправильностей и показана возможность фрикционных колебаний ползуна при $f \geq f_*$, что раньше считалось невозможным [2].

Установлено, что смена положения активной стороны у двухсторонней связи происходит в моменты, когда возникает спусковая реакция, а коэффициент трения имеет значение не меньше критического.

Дан новый подход к существующей проблеме о парадоксах Пенлеве. Выявлено, что мнимые парадоксы могли возникать только в тех случаях, когда реакцию со стороны неидеальной связи находили из уравнения, которое не подтверждало баланс моментов от приложенных сил.

Для тормозной колодки парадокс был признан надуманным из-за существующего недопонимания полученной формулы для нахождения реакции, учитывающей процесс торможения с подпрыгиванием колодки. Такое стало следствием формальных подходов к применению закона о трении скольжения и к уравнению, выражающего баланс моментов от приложенных сил.

*Литература*


1. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895, 111 p. (Пэнлеве П. Лекции о трении. М: Гостехиздат, 1954. 316 с.).
2. De Sparre. Sur le frottenent de glissement // Comptes Rendus. 1905. V. 141. P. 310.
3. Klein F. Zur Painleves Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze // Ztschr. Math. Phys. 1909. B. 58. S. 186.
4. Pfeifer F. Zur Frage der sogenannten Coulombshen Reibung - sgesetze // Ztschr. Math. Phys. 1909. B. 58. S. 273.
5. Lecornu L. Sur le frottement de glissement // C. R. Acad. Sci. Paris, 1905, vol. 140, pp. 635-637.
6. Appel P. Traité de mécanique rationnelle. Tome deuxieme. Dynamique des system`es mécanique analytique. Paris: Gauthier-villars, éditeur, 1953. (Аппель П. Теоретическая механика. Т 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.).
7. Бутенин Н.В. Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. Вып.1. С. 3–22.
8. Фуфаев Н.А. Динамика системы в примере Пэнлеве-Клейна. О парадоксах Пэнлеве // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 48–53.
9. Небасов М.В. Концепция сухого трения и парадоксы Пэнлеве // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. № 1. С. 21–35.
10. Неймарк Ю.И. Ещё раз о парадоксах Пэнлеве // Изв. АН СССР. МТТ. 1995. № 1. С. 17–21.
11. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. К столетию проблемы парадокса Пенлеве // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 7–33.
12. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Парадоксы Пенлеве и динамика тормозной колодки // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. № 3. С. 366–375.
13. Григорян С.С. Разрешение парадокса сухого трения – парадокса Пэнлеве // Доклады Академии наук. 2001. Т. 379. № 1. С. 54–58.
14. Коронатов В.А. Финал парадокса Пенлеве для тормозной колодки // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 2 (42). С. 44–48.
15. Коронатов В.А. Моделирование работы тормозной колодки с учетом удара трением, исключающего парадоксы Пенлеве // Системы. Методы. Технологии. 2024. № 4 (64). С. 22–26.
16. Коронатов В.А. Причины возникновения «парадоксов» Пенлеве при исследовании механических систем с сухим трением // Системы. Методы. Технологии. 2025. № 1 (65). С. 68–76.
17. Коронатов В.А. Об отсутствии парадоксов Пенлеве в механических системах с сухим трением. В сборнике: Проблемы механики современных машин. Сборник статей IX Международной конференции. Улан-Удэ, 2025. С. 108–113.
18. Журавлев В.Ф. О «парадоксе» тормозной колодки // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474. № 3. С. 301–302.
19. Козлов В.В. Трение по Пенлеве и лагранжева механика // Доклады Академии наук. 2011. Т. 438. № 6. С. 758–761.
20. Ле Суан Ань. Динамика систем с кулоновым трением (теория и эксперимент). — СПб.: Нестор, 1999 —300 с.
21. Иванова Т.Б., Ердакова Н.Н., Караваев Ю.Л. Экспериментальное исследование тормозной колодки // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471. № 4. С. 421–424.
22. Иванова Т.Б., Мамаев И.С. Динамика системы Пенлеве-Аппеля // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. № 1. С. 11–23.
23. Крагельский И.В., Щедров В.С. Развитие науки о трении. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 234 с.


*References*


1. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895, 111 p. (Penleve P. Lectures on friction. Moscow: Gostekhizdat, 1954. 316 p.).
2. De Sparre. Sur le frottenent de glissement // Comptes Rendus. 1905. V. 141. P. 310.
3. Klein F. Zur Painleves Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze // Ztschr. Math. Phys. 1909. B. 58. S. 186.
4. Pfeifer F. Zur Frage der sogenannten Coulombshen Reibungsgesetze // Ztschr. Math. Phys. 1909. B. 58. S. 273.
5. Lecornu L. Sur le frottement de glissement // C. R. Acad. Sci. Paris, 1905, vol. 140, pp. 635–637.
6. Appel P. Traité de mécanique rationnelle. Tome deuxieme. Dynamique des system`es mécanique analytique. Paris: Gauthier-villars, éditeur, 1953. (Appel P. Theoretical mechanics. Vol. 2. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 487 p.).
7. Butenin N.V. Consideration of «degenerate» dynamical systems using the «leap» hypothesis // Applied Mathematics and Mechanics. 1948. Vol. 12. Issue 1. pp. 3–22.
8. Fufaev N.A. Dynamics of the system in the example of Penleve-Klein. On the Penleve paradoxes // Izv. AN SSSR. MT. 1991. №4. pp. 48–53.
9. Nebasov M.V. The concept of dry friction and the Penleve paradoxes // Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky. Series: Mathematical modeling and optimal control. 1998. No. 1. pp. 21–35.
10. Neymark Yu.I. Once again about Penlev's paradoxes // Izv. USSR Academy of Sciences. MT. 1995. No. 1. pp. 17–21.
11. Neymark Yu.I., Smirnova V.N. To the centenary of the Penlev paradox problem // Bulletin of Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky. Series: Mathematical modeling and optimal control. 2001. No. 2. pp. 7–33
12. Neymark Yu.I., Fufaev N.A. The Penlev paradoxes and the dynamics of the brake pad // Applied Mathematics and Mechanics. 1995. Vol. 59. No. 3. pp. 366–375.
13. Grigoryan S.S. Resolution of the paradox of dry friction - the paradox of Penleve // Reports of the Academy of Sciences. 2001. Vol. 379. No. 1. pp. 54–58.
14. Koronatov V.A. The finale of the Penleve paradox for the brake pad // The system. Methods. Technologies. 2019. No. 2 (42). pp. 44–48.
15. Koronatov V.A. Modeling the operation of a brake pad taking into account friction impact, eliminating the Penleve paradoxes // Systems. Methods. Technologies. 2024. No. 4 (64). pp. 22–26.
16. Koronatov V.A. The causes of Penlev's «paradoxes» in the study of mechanical systems with dry friction // Systems. Methods. Technologies. 2025. No. 1 (65). pp. 68–76.
17. Koronatov V.A. On the absence of Painlevet paradoxes in mechanical systems with dry friction In the collection: Problems of mechanics of modern machines. Collection of articles of the IX International Conference. Ulan-Ude, 2025. pp. 108–113.
18. Zhuravlev V.F. About the «paradox» of the brake pad // Reports of the Academy of Sciences. 2017. Vol. 474. No. 3. pp. 301–302.
19. Kozlov V.V. Penlev friction and Lagrangian mechanics // Reports of the Academy of Sciences. 2011. Vol. 438. No. 6. pp. 758–761.
20. Le Xuan An. Dynamics of coulomb friction systems (theory and experiment). – St. Petersburg: Nestor, 1999. 300 p.
21. Ivanova T.B., Erdakova N.N., Karavaev Yu.L. Experimental study of a brake pad // Reports of the Academy of Sciences. 2016. Vol. 471. No. 4. pp. 421–424.
22. Ivanova T.B., Mamaev I.S. Dynamics of the Penleve-Appel system // Applied mathematics and mechanics. 2016. Vol. 80. No. 1. pp. 11–23.
23. Kragelsky I.V., Shchedrov V.S. Development of the science of friction. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1956. 234 p.