

Обобщение элементарной теории проникания в грунтовые среды при однократном ударе на случай вращающегося ударника

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 27.01.2022, принята 08.02.2022

Показано применение элементарной теории проникания в грунтовые среды для вращающегося конического ударника при однократном ударе, когда скорость поступательной составляющей движения направлена перпендикулярно к поверхности. Резкое изменение сразу двух скоростей, линейной и угловой, у ударника перед началом проникания позволяют считать, что удар будет комбинированным. Его составляющими будут являться прямой удар и вращательный, вызванный силами сухого трения. Сила лобового сопротивления задается в нелинейной зависимости от скорости проникания и с учетом потери прочности среды в зависимости от силы удара. Сила комбинированного удара считается прямо пропорциональной его начальной обобщенной скорости, определяемой через начальные скорости у составляющих удара. Влияние комбинированного удара на прочность среды устанавливается согласно гипотезе о возникновении трещин. От вращательной составляющей удара учтена возможность образования поперечных трещин и их влияние на рост числа и размеров продольных трещин в направлении проникания. Влияние таких трещин на прочность грунта определяется через введенную обобщенную начальную скорость комбинированного удара. Найдено критическое значение обобщенной скорости, превышение которой ведет к погружению тела в грунт, а комбинированный удар с такой начальной скоростью принимается в качестве эталонного. Эталонный удар разделяет между собой эффективные и холостые удары, приводящие к возможности погружения тела в грунт или отсутствию этого. Сравнение текущего удара с эталонным позволяет определять для ударника начальные линейную и угловую скорости проникания и вид послеударного движения. Для составляющих комбинированного удара установлены начальные скорости, в диапазоне которых возможен один из вариантов послеударного движения тела: вращение с погружением, вращение без погружения, погружение без вращения, остановка вращения без погружения. Получены уравнения движения для вращающегося звездообразного ударника, объясняющие возможность увеличения глубины проникания в сравнении с коническим ударником.

Ключевые слова: грунт; проникание; погружение; теория удара; удар трением; комбинированный удар; динамическое напряжение; лобовое сопротивление; закон Кулона о трении; конический ударник; звездообразный ударник.

Generalization of the elementary theory of penetration into soil media with a single impact in case of a rotating striker

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 27.01.2022, accepted 08.02.2022

The application of the elementary theory of penetration into soil media for a rotating conical striker with a single impact, when the speed of the translational component of the motion is directed perpendicular to the surface, is shown. A sharp change in two speeds at once – linear and angular, at the striker before the start of penetration, makes it possible to assume that the blow will be combined. Its components will be a direct impact and rotational, caused by the forces of dry friction. The force of frontal resistance is set in a non-linear dependence on the penetration velocity, taking into account the loss of strength of the medium depending on the impact force. The strength of the combined impact is considered to be directly proportional to its initial generalized speed, determined through the initial speeds of the impact components. The influence of the combined impact on the strength of the medium is established according to the hypothesis of the occurrence of cracks. From the rotational component of the impact, the possibility of the formation of transverse cracks and their influence on the growth of the number and size of longitudinal cracks in the direction of penetration is taken into account. The effect of such cracks on the strength of the soil is determined through the introduced generalized initial velocity of the combined impact. The critical value of the generalized speed is found, the excess of which leads to the body sinking into the ground, and the combined impact with such an initial speed is taken as a reference. The reference impact separates effective and idle impacts leading to the possibility of sinking the body into the ground or the absence of this. Comparison of the current impact with the reference one makes it possible to determine the initial linear and angular penetration velocities for the striker and the type of post-impact movement. For the components of the combined impact, the initial velocities are set, in the range of which one of the options for the post-impact movement of the body is possible: rotation with immersion, rotation without immersion, immersion without

rotation, stop rotation without immersion. Equations of motion for a rotating star-shaped impactor are obtained, which explain the possibility of increasing the penetration depth in comparison with a conical impactor.

Keywords: priming; penetration; dive; impact theory; friction impact; combined strike; dynamic stress; drag; Coulomb's law of friction; conical drummer; star striker.

Введение. При моделировании процесса проникания тела в грунт при однократном ударе возникали затруднения при введении силы лобового сопротивления и применении стереомеханической теории удара. Силу сопротивления пытались искать по аналогии с тем, как это принято делать в воздушных средах — с учетом ее плотности и в виде линейной или квадратичной зависимости от скорости проникания [1–3]. А прочностная составляющая силы сопротивления была не способна реагировать на динамику силового воздействия на грунт. Отсутствие возможности находить силу удара в рамках стереомеханической теории Ньютона не позволяло находить ответы на ряд ключевых вопросов задач проникания. Например, определять влияние силы удара на прочность среды, находить величину начальной скорости проникания, отличать эффективные удары от холостых — приводящих к прониканию тела в грунт или отсутствию такой возможности. Сам грунт, наделяемый свойствами газообразных сред, лишился таких важных возможностей, как способность терять свою целостность в виде возникающих микро- и макротрещин и свою начальную прочность. Тем самым разрушительное действие удара, приводящее к нарушению целостности и прочности грунтовой среды, фактически не бралось во внимание. Более того, для грунта в виде пластического газа — что берется за основу при рассмотрении высокоскоростного проникания в моделях локального взаимодействия (МЛВ) — такая возможность просто исключалась [4; 5].

В недавно созданной элементарной теории [6–8] проникания ударника в грунтовую среду при однократном ударе были использованы иные принципы для решения указанных задач. И сделано это было на примере поступательно движущегося ударника, когда направление удара перпендикулярно к поверхности грунта.

Принципиальные отличия элементарной теории проникания от других методов заключаются в следующем:

1. В выборе модели самого грунта — это твердая среда [6–8], наделенная прочностными свойствами и возможностью терять свою целостность в виде возникающих микро- и макротрещин, а не среда, похожая на газообразную, как это обычно предполагается либо напрямую в МЛВ [4; 5], либо косвенно в инженерных моделях [9; 10].

2. В выборе основной характеристики грунта, определяющей текущее состояние среды после произведенного удара — это не плотность грунта, как это принято считать по аналогии с воздушными средами [4; 5], а его прочность [6–8].

3. Аналитическим видом нахождения силы лобового сопротивления ударника со стороны грунтовой среды — это не линейная или квадратичная зависимость от скорости проникания [1–3; 9; 10], как это принимается в воздушных средах, а — нелинейная зависимость в виде аппроксимации Паде 1-й степени [6–8].

4. Сила лобового сопротивления имеет ограничение по максимуму и ищется не только в зависимости

от скорости проникания, но и от силы удара (его начальной скорости), изменяющего прочность среды — привычный классический вид силы сопротивления, используемый для воздушных сред, не позволяет учесть указанное.

5. Возможностью введения эталонного удара, сравнение с которым позволяет, не находя силы текущего удара, определять его влияние на изменение прочности грунта — отсутствие такой возможности приводило к ошибочным результатам моделирования и некорректностям при применении стереомеханической теории Ньютона.

Изменение указанных принципов привело к таким результатам:

- Отказаться от аналогий с воздушными средами — такие аналогии представляются сомнительными, так как не учитывают возможность образования микро- и макротрещин, нарушающих неразрывность и прочность среды.

- Для инженерных моделей снять ограничения на диапазон наносимых ударов по их величине. Основанием для таких ограничений являлась необходимость уточнения плотности среды в зависимости от силы удара, что является актуальным для воздушных сред, но не грунтовых.

- Усомниться в правильности выбранных принципов МЛВ для высокоскоростного проникания — как уже было отмечено выше, плотность грунтов не играет той определяющей роли, которая ей отводится по аналогии с воздушными средами. Из-за возникновения микро- и макротрещин в грунтовой среде уравнения механики сплошной среды используются некорректно, необходимое условие для их применения — условие неразрывности — не соблюдается.

- Возможностью определять критическое значение начальной скорости удара, превышение которого приводит к началу проникания ударника в грунт — раньше такой возможности не было.

- Различать среди текущих ударов эффективные и холостые, сравнивая их с эталонным ударом — тоже раньше не представлялось возможным.

- Подчеркивается важность отделения фазы удара от начала проникания по времени — разрушительное действие удара, снижающее прочность среды, является необходимым условием для возможности начала проникания и должно предшествовать этому.

- Найдено аналитическое условие начала проникания — раньше такая возможность предварительно не обсуждалась. Заранее полагалось, что удар эффективный, а его сила избыточно большая.

- Для эффективных ударов определять начальную скорость проникания как разность между начальными скоростями текущего и эталонного ударов — раньше начальная скорость проникания просто приравнивалась к начальной скорости удара.

- Учитывать упругие свойства верхнего слоя грунта — что раньше не делалось.

- Учитывать восстановление прочностных свойств среды по мере удаления от места удара — что тоже не учитывалось.

В данной работе элементарная теория проникания в грунт будет применена для вращающегося ударника. В существующих немногочисленных работах [11–13] вращение ударника учитывается чересчур формально. Обычно записывается лишь уравнение вращательного движения тела, но без учета влияния вращательной составляющей удара на процесс проникания. А вращательная составляющая удара, особенно когда она велика, может существенным образом влиять как на прочность грунта, так и на величины начальных скоростей проникания — линейную и угловую. Раньше это никак не учитывалось и является одной из причин для предлагаемого обобщения. Сам удар, который наносится вращающимся ударником, будет в дальнейшем называться комбинированным. Он, в отличие от обычного простого удара, приводит к резким изменениям сразу двух скоростей, линейной и угловой, перед началом проникания. Результат действия комбинированного удара можно представить, как наложение одновременного действия двух ударов — прямого и вращательного. Вращательный удар является следствием внезапного возникновения сил сухого трения в момент соприкосновения вращающегося тела с грунтом. Указанные вращательный и прямой удары могут в дальнейшем называться составляющими комбинированного удара.

Дополнительно к тем вопросам, которые говорят о несовершенстве прежних подходов и были перечислены в недавней работе [8], можно добавить и такие:

1. Как можно учесть силу отдельного удара с учетом вращательной составляющей ударника? — стереомеханическая теория Ньютона [9; 10] ответа на это не дает, даже при простом прямом ударе.

2. Как влияет наносимый удар на начальную угловую скорость при проникании? — ее было принято просто приравнивать к начальной скорости вращательной составляющей удара [например, 11–13]. Тем самым, вращательная составляющая удара совмещалась с началом проникания, что делается неправильно.

3. Почему вращательную составляющую удара не учитывали? — по-видимому, из-за того, что не могли определять угловую скорость в начале проникания.

4. Каково влияние сухого трения на силу вращательной составляющей удара? — этот вопрос не поднимался.

5. Как сказывается разрушительное действие вращательной составляющей удара на прочность среды в поперечном направлении? — обсуждение данного вопроса автору неизвестно.

6. Как сказывается разрушительное действие вращательной составляющей удара и на прочность среды в продольном направлении? — это тоже, похоже, никак не обсуждалось.

7. Как учесть действие комбинированного удара и, в частности, его вращательной составляющей в уравнениях движения ударника? — разрушительное действие комбинированного удара раньше в уравнениях никак не учитывалось.

8. Каково влияние вращательной составляющей движения ударника на возможность проникания тела в изменение прочности среды в продольном направлении.

грунт? — о таком влиянии говорят визуальные наблюдения.

9. Когда вращение ударника может прекратиться и становится поступательным в начале проникания? — эта и другие возможности преобразования сложного движения ударника в более простые раньше не обсуждались.

Ответы на сформулированные выше вопросы и некоторые другие будут даны в новой обобщенной теории. Обобщения будем делать на основе тех принципов, которые использовались для недавно созданной элементарной теории проникания [6–8].

Обобщение элементарной теории проникания на случай вращающегося ударника. Построение обобщенной теории проникания рассмотрим на примере движения вращающегося ударника, который имеет начальные скорости V_-, Ω_- — линейную и угловую — перед ударом о грунт; направление вектора скорости V_- предполагается строго по нормали к горизонтальной поверхности грунта. Эти скорости определяют начальные скорости текущего комбинированного удара, точнее, его составляющих — прямого удара и вращательного. Прямой удар приводит к резкому изменению линейной скорости поступательной составляющей движения, а вращательный удар — к резкому изменению угловой скорости вращения ударника. Вращательный удар возникает вследствие противодействия вращению ударника моменту трения верчения со стороны грунта. В качестве проникающего тела, ударника, рассматривается (см. рис.) абсолютно твердый цилиндр массы m с коническим, не столь острым оголовком, характеризуемым углом полураствора γ и высотой h ; длиной цилиндрической хвостовой части будем пренебрегать, считая, что $d \ll 1$, на основании чего силы бокового трения учитываться не будут; J — момент инерции ударника относительно оси вращения. Кроме того, приняты следующие обозначения: $\sigma_\gamma, \tau_\gamma$ — соответственно нормальные и касательные напряжения, возникающие на конической поверхности оголовка. Предполагается, что предельно-равновесное положение ударника, которое предшествует началу проникания, определяется полным погружением конического оголовка в грунт.

Для определения аналитического вида силы лобового сопротивления воспользуемся ранее введенной гипотезой [6–8]: «При ударах телом с плоским или не столь острым оголовком возникают трещины, близкие по числу и размерам как в направлении удара, так и в поперечных направлениях...». Это гипотеза дает основания предположить, что потеря прочности грунта при комбинированном ударе зависит от составляющих его начальных скоростей: как от линейной в направлении проникания (продольном), так и от окружной скорости в поперечном направлении. А сила комбинированного удара будет пропорциональна его начальной обобщенной скорости: $(V_- + a\Omega_-)$. Здесь коэффициент a , имеющий размерность длины, определяет, какая часть от силы вращательного удара затрачивается на образование продольных трещин, что позволит учитывать влияние поперечных трещин на образование трещин и

Предложенный вид начальной обобщенной скорости берется из соображений, что комбинированный удар приводит к потере прочности грунта в результате суммарного действия составляющих удара — прямого и вращательного. Определяющим здесь является не сама величина абсолютной начальной скорости комбинированного удара, а вклад каждой составляющей удара в образование трещин в продольном направлении, который пропорционален их начальным скоростям.

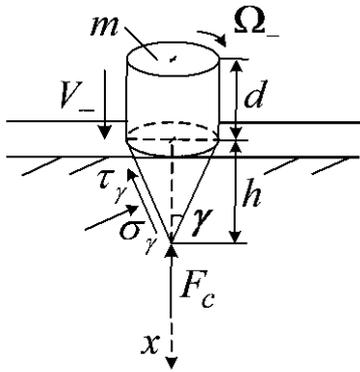


Рис. Начальное предельно-равновесное положение вращающегося ударника (V_- , Ω_- — линейная и угловая начальные скорости комбинированного удара)

Здесь уместно сделать следующее замечание. Трещина — это трехмерный объект, который формируется по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Последнее следует понимать в приближенно усредненном виде, так как каждая трещина распространяется по сложной криволинейной траектории, не имеющей строго определенного направления. При образовании трещины можно выделить приоритетное направление — в направлении удара и не приоритетные, которые, будем считать, почти перпендикулярны к приоритетному направлению. Трещины в направлении произведенного удара будем называть приоритетными, а другие — сопутствующими. Приоритетные и сопутствующие трещины имеют весьма сложную и заранее непредсказуемую форму, вид которой при нашем подходе несущественен и поэтому определяться не будет. Для нас главное — их усредненные суммарные размеры, определяющие объем, тоже усредненный, образующихся пустот в грунтовой среде и их приближенно усредненные направления, среди которых будем различать продольное или поперечные. Будем полагать, что чем больше пустоты (трещины) в данном направлении, тем меньше будет прочность грунта в этом направлении. А также что при ударах равной силы и одинаково направленных создаются трещины усредненно одинаковых по объему образующихся пустот или размеров, т. е. потеря прочности грунта от таких ударов будет считаться усредненно равной. Такие допущения принимаются в соответствии с ранее введенной гипотезой элементарной теории проникания. В приоритетном направлении трещины по суммарным размерам всегда наиболее или, по крайней мере, не меньше размеров по сравнению с трещинами неприоритетных направлений.

Вполне логично допустить, что на прочность грунта в том или ином направлении влияют возникающие трещины, главным образом, того же направления. Причем как приоритетные трещины, так и сопутствующие. Будем полагать, что на прочность грунта наибольшее влияние оказывают приоритетные трещины при сравнении их с сопутствующими. При вводе силы сопротивления грунта это следует принимать во внимание, когда учитывается потеря прочности грунтовой среды вследствие нанесенного удара.

В элементарной теории проникания приоритетными трещинами являлись только те, которые были усредненно близки к направлению прямого удара, т. е. в направлении проникания. При определении силы лобового сопротивления влиянием сопутствующих трещин полностью пренебрегали, так как они располагались усредненно перпендикулярно к направлению проникания. В обобщенной теории приоритетными трещинами будут как трещины в направлении прямого удара, так и трещины, перпендикулярные к этому направлению — вследствие вращательной составляющей удара. Сопутствующие трещины от вращательной составляющей удара здесь следует принимать во внимание при учете потери прочности грунта в направлении проникания, так как их усредненные направления будут совпадать с этим направлением. Для этого в аналитическом выражении для силы лобового сопротивления вводится начальная обобщенная скорость комбинированного удара, где поправочный коэффициент a перед начальной угловой скоростью вращательной составляющей удара будет определять отличия влияния сопутствующих трещин от приоритетных на прочность грунта в направлении проникания.

Сила лобового сопротивления вводится по аналогии с тем, как это было сделано в элементарной теории проникания [6–8]. Только вместо начальной скорости прямого удара в ней должна учитываться начальная обобщенная скорость комбинированного удара. Тем самым, для силы лобового сопротивления ударника в продольном направлении вводится формула:

$$F_c = F_0 (2 - e^{-\alpha x}) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b(V_- + a\Omega_-) + \Delta}. \quad (1)$$

Здесь F_0 — наибольшая сила лобового сопротивления, подлежащая определению; a, b, Δ — коэффициенты аппроксимации, определяемые экспериментально; x — координата проникания (погружения) ударника, которая отсчитывается начиная с глубины h (от острия оголовка в предельно-равновесном положении ударника перед началом проникания) и которая направлена вниз от поверхности грунта; точкой $\langle \cdot \rangle$ обозначается дифференцирование по времени t . Аналитическое выражение $2 - e^{-\alpha x}$ — один из возможных вариантов задания переменного коэффициента пропорциональности, определяющий эмпирический закон затухания потери прочности грунта при удалении от места удара, где α — параметр, определяемый экспериментально.

Приведенная формула (1) подразумевает потерю прочности грунта, а значит, и возможность проникания

ударника даже в тех случаях, когда совершаемый удар будет чисто вращательным, т. е. при отсутствии прямого удара. Такое может наблюдаться в действительности при достаточно сильном чисто вращательном ударе, но при этом ударнику должен сообщаться хоть какой-то толчок в направлении проникания, пусть даже очень слабый.

Заметим, что аналогичным образом можно подойти и к определению поперечной силы сопротивления со стороны грунта, действующей на ударник. Этот вопрос следовало бы рассмотреть более подробно при определении силы трения, возникающей на боковой поверхности цилиндрической хвостовой части ударника, когда ее длина не столь мала. В нашем же случае, полагая, что $d \ll 1$, этот вопрос рассматриваться не будет.

Рассмотрим случай, когда сила тяжести ударника не превышает величину противодействия упругих сил верхнего слоя, т. е. когда $mg \leq \hat{\eta} \hat{U}$, где $\hat{\eta}, \hat{U}$ определяют соответственно жесткость верхнего слоя и объем вытесняемого ударником грунта. Для предельно-равновесного положения ударника объем вытесненного грунта принимается равным полному объему конического оголовка: $\hat{U} = U = \frac{1}{3} S_0 h$, где $S_0 = \pi h^2 tg^2 \gamma$ — площадь поперечного сечения хвостовой цилиндрической части ударника. Предполагается, что в предельно-равновесном положении ударника упругие связи верхнего слоя еще не нарушены.

Моделирование процесса проникания далее проведем по аналогии с тем, как ранее это было сделано при поступательном движении ударника в работе [7].

1. Из условия статического равновесия ударника конического оголовка, когда он полностью погружен в грунт, и отсутствии удара (см. рис.) следует, что:

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= \frac{\sigma_0(1-\eta U)}{1+\mu_1 ctg\gamma} \Rightarrow \\ \sigma_{\pi/2} &= \frac{\sigma_0(1-\eta U)}{\sin^2 \gamma(1+\mu_1 ctg\gamma)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\eta = \frac{\hat{\eta}}{mg}$ — приведенная жесткость верхнего слоя грунта; $\sigma_{\pi/2}$ — нормальные напряжения в грунте для площадок, перпендикулярные к направлению оси x . Было учтено, что $\tau_\gamma = \mu_1 \sigma_\gamma$, где μ_1 определяет предельное значение коэффициента трения, возникающее перед началом скольжения-проникания из состояния покоя; $\sigma_0 = \frac{mg}{S_0}$ — нормальное напряжение, возникающее в грунте от силы тяжести данного ударника, когда у него оголовка не конический, а плоский.

2. Для определения критической обобщенной начальной скорости удара $(V_- + a\Omega_-)_*$ рассмотрим предельно-равновесное состояние ударника сразу после удара (см. рис.), считая, что удар был недостаточной

силы для начала проникания, т. е. когда $V_- + a\Omega_- \leq (V_- + a\Omega_-)_*$:

$$\begin{aligned} F_c = mg(1-\eta U) \Rightarrow F_0 \frac{1}{k} = mg(1-\eta U) \Rightarrow \\ F_0 = kmg(1-\eta U). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $k = 1 + \frac{b}{\Delta}(V_- + a\Omega_-)$ — коэффициент динамичности, определяющий влияние удара на прочность грунта. Уравнение равновесия после деления на площадь торцевого сечения $S_{\pi/2}$ примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma - k \frac{\sigma}{k} = 0 \Rightarrow \sigma_\sigma = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \\ \sigma_{\sigma 1} = \frac{\sigma_1}{k_*}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь было принято, что $\sigma = \frac{mg(1-\eta U)}{S_{\pi/2}}$ — статиче-

ское нормальное напряжение грунта, возникающее под действием силы тяжести ударника, учитывающей влияние упругих сил верхнего слоя; σ_1 — предельное статическое нормальное напряжение для данного грунта, определяемое экспериментально; $\sigma_\sigma; \sigma_{\sigma 1}$ — соответственно динамическое и предельно допустимое динамические напряжения, возникающие в грунте в результате произведенного удара; $k_* = 1 + \frac{b}{\Delta}(V_- + a\Omega_-)_*$ — критическое значение коэффициента динамичности. Предельно-равновесное состояние тела определится из условия:

$$\sigma_{\sigma 1} = \sigma_{\pi/2},$$

что позволит определить критическое значение начальной обобщенной скорости для комбинированного удара:

$$(V_- + a\Omega_-)_* = \frac{\Delta}{b} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg\gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right], \quad (5)$$

где $n_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ — запас прочности грунта под действием силы тяжести данного ударника, если бы у него был не конический оголовка, а плоский, радиус которого соответствует радиусу хвостовой цилиндрической части. Удар с критической начальной скоростью $(V_- + a\Omega_-)_*$ принимается за эталонный, который приводит к предельно-равновесному состоянию ударника после удара, когда проникание не может начаться при отсутствии начальной скорости. Тем самым, удары с начальной скоростью $V_- + a\Omega_- \leq (V_- + a\Omega_-)_*$ не будут приводить к началу погружения тела, а при $V_- + a\Omega_- > (V_- + a\Omega_-)_*$ следует ожидать проникание ударника в грунт [6; 7] с начальной обобщенной скоростью:

$$V_0 + a\Omega_0 = (V_- + a\Omega_-) - (V_- + a\Omega_-)_*, \quad (6)$$

где V_0, Ω_0 — начальные скорости соответственно для поступательной и вращательной составляющих погружения.

3. Для определения в начале проникания скоростей — линейной и угловой, определяющих начальные условия, запишем теорему импульсов для прямого и вращательного ударов:

$$\begin{cases} mV_0 - mV_- = S_n; \\ J\Omega_0 - J\Omega_- = S_\tau. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь S_n, S_τ, ρ — соответственно нормальный и касательный ударные импульсы, коэффициент трения верчения. Принимая во внимание, что, согласно гипотезе Рауса: $S_\tau = \rho S_n$, где:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, \text{ при } \Omega_0 > 0; \\ [-\rho_1; \rho_1], \text{ при } \Omega_0 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

получим:

$$\Omega_0 - \Omega_- = \rho q(V_0 - V_-), \quad (9)$$

где $q = \frac{m}{J}$.

Будем считать, что у комбинированного удара его составляющие — прямой и вращательный являются абсолютно не упругими ударами. Первое предположение основано на том, что возможные реальные отскоки ударника от грунта могут приводить лишь к меньшим по силе повторным ударам в сравнении с первым. Что исключает вариант возможности начала проникания ударника в реальность при последующих соударениях, если не произошло этого сразу, и дает основания пренебречь возможными отскоками. Второе предположение для вращательной составляющей удара исключает возможности смены направления послеударного вращения тела, что тоже будет близко к реальности. По крайней мере, для случаев, когда отскоки отсутствуют, что принято в нашей модели. Сказанное означает, что отскоки ударника в поступательном движении будут считаться невозможными, а во вращательном — не допускается смена направления вращения.

На основании записанных соотношений (5), (6), (8), (9) можно различать такие качественно разные варианты послеударного взаимодействия ударника с грунтом: проникание с сохранением вращения, отсутствие проникания с сохранением вращения, отсутствие проникания и прекращение вращения, проникание с прекращением вращения (случай вырождения в проникание с поступательным движением). Для возможности реализации этих случаев определены необходимые диапазоны изменения начальных скоростей комбинированного удара.

а) Вращение с погружением: $V_0 > 0; \Omega_0 > 0; \rho = \rho_0$.

$$\begin{cases} V_- + a\Omega_- > \frac{\Delta}{b} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right]; \\ V_- > 0; \Omega_- > 0. \end{cases} \quad (10)$$

б) Вращение без погружения: $V_0 = 0; \Omega_0 > 0; \rho = \rho_0$.

$$\begin{cases} V_- + a\Omega_- \leq \frac{\Delta}{b} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right]; \\ V_- > 0; \Omega_- > 0. \end{cases} \quad (11)$$

в) Погружение без вращения: $V_0 > 0; \Omega_0 = 0; \rho = [-\rho_1; \rho_1]$

$$\begin{cases} \Omega_- < \frac{\rho_1 q \Delta}{b(\rho_1 q a + 1)} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right]; \\ V_- > \frac{\Delta}{b(\rho_1 q a + 1)} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right]. \end{cases} \quad (12)$$

д) Остановка вращения без погружения: $V_0 = 0; \Omega_0 = 0; \rho = [-\rho_1; \rho_1]$

$$\begin{cases} \Omega_- < \frac{\rho_1 q \Delta}{b(\rho_1 q a + 1)} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right]; \\ V_- \leq \frac{\Delta}{b(\rho_1 q a + 1)} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right]. \end{cases} \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $V_- + a\Omega_- > (V_- + a\Omega_-)_*$, т. е. при ударе, превосходящем эталонный и приводящем к началу проникания тела в грунт с вращением, т. е. когда $V_0 > 0; \Omega_0 > 0; \rho = \rho_0$, что соответствует отмеченному выше случаю а). Дифференциальное уравнение поступательной составляющей погружения и вращательной составляющей движения запишутся так:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g - \\ n_1 g \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma) (2 - e^{-\alpha}) &\frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b(V_- + a\Omega_-) + \Delta}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= -\rho_0 n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma) \times \\ &\times (2 - e^{-\alpha}) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b(V_- + a\Omega_-) + \Delta}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь было учтено, что $F_{0*} = n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)$ и справедливость закона Кулона при определении момента трения верчения.

Начальные условия для записанных дифференциальных уравнений (14), (15) определяются так:

$x_0 = h; \varphi_0 = 0; \dot{x}_0 = V_0; \omega_0 = \Omega_0$, где:

$$\begin{aligned} V_0 &= V_- - \frac{\Delta}{b(\rho_0 q a + 1)} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right]; \\ \Omega_0 &= \Omega_- - \frac{\rho_0 q \Delta}{b(\rho_0 q a + 1)} \left[\frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma)}{1 - \eta U} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Опытные данные говорят, что вращение тела может заметно влиять на процесс погружения тела в грунт — его поступательную составляющую движения. В записанных же уравнениях (14) и (15) первое уравнение никак не зависит от второго, а значит, и от вращательной составляющей движения. Зависимость от угловой скорости ω была потеряна из-за пренебрежения силой трения хвостовой части поверхности ударника. Однако если попытаться учесть эту силу, считая, например, что $d > 1$, то согласно классической формулировке закона

Амонтона – Кулона положение не исправится. Этот закон о трении формулировался для поступательно движущихся тел скольжения. Применение закона Амонтона – Кулона в классической формулировке здесь неприемлемо, несмотря на то, что его часто пытаются применять и в таких случаях. Причем как при определении силы бокового трения, так и при определении силы лобового сопротивления, когда касательное напряжение выражается через нормальное по известной формуле: $\tau = \mu\sigma$.

По мнению автора, как напрямую, так и в дифференциальной форме классический закон о трении в нашем случае использовать нельзя [14–16] — необходимое условие применимости этого закона здесь не соблюдается. А именно: тела скольжения должны двигаться друг относительно друга поступательно. Именно при таком движении тел скольжения Кулоном и был экспериментально установлен этот закон, о чем часто забывают. Поэтому общепринятый классический подход в определении силы трения скольжения здесь следует признать ошибочным.

При непоступательном движении ударника следует использовать закон Амонтона – Кулона с учетом тех поправок, которые предлагаются методом кинематических зон [14–16]. Метод кинематических зон позволяет корректно применять сам закон о трении в таких случаях и определять боковое трение с учетом вращения. И тогда указанное выше противоречие с отсутствием влияния вращения на погружение ударника исчезнет. Согласно таким поправкам, угловая скорость ω будет уменьшать силу трения скольжения. Это приведет, в частности, к увеличению глубины предполагаемого погружения ударника в грунт. Применение закона Амонтона – Кулона в случаях непоступательного скольжения автором обсуждалось в статье [17].

Записанное уравнение (14) поступательной составляющей движения ударника будет соответствовать дифференциальному уравнению элементарной теории проникания, если принять, что $\Omega_- \equiv 0; a \equiv 0$.

В качестве ударника часто берется цилиндрическое тело с гладкой поверхностью и с оголовком в виде острого или усеченного конуса. Вместо такого обычного конического ударника иногда рассматривается звездообразный ударник. Звездообразный ударник представляет собой тело в виде усеченного конуса, но только поперечное сечение не круглое, а в форме звездочки, которая может иметь разное число концов. Каждая сторона такой звездочки является вершиной лепестка, заостренного по всей его длине и образующего острые боковые грани. Для такого звездообразного ударника уравнения движения примут вид:

$$\ddot{x} = g - n_1 g \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma) (2 - e^{-\alpha x}) \times \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b_1 \omega + b(V_- + a\Omega_-) + \Delta}; \quad (17)$$

$$J\dot{\omega} = -\rho_0 n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg \gamma) (2 - e^{-\alpha x}) \times \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b_1 \omega + b(V_- + a\Omega_-) + \Delta}. \quad (18)$$

В сравнении с дифференциальными уравнениями проникания (14) и (15), записанными для конического ударника, в уравнениях (17) и (18) знаменатели выражения для силы лобового сопротивления содержат дополнительное слагаемое $b_1 \omega$ — определяющее дополнительную потерю прочности грунта. Это слагаемое определяет непрерывное разрушающее действие на грунт острых лепестков звездообразного ударника в процессе проникания, в зависимости от текущей угловой скорости вращения ω , где b_1 — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность длины. Такой возможностью конический ударник не обладает из-за отсутствия острых граней, он как бы вхолостую будет прокручиваться при проникании с вращением. В записанных уравнениях упрощенно предполагалось, что максимальные значения для силы лобового сопротивления F_0 у конического и звездообразного ударников одинаковы. Сравнение уравнений (14) и (17) для поступательной составляющей проникания ударника в этих двух случаях говорит о том, что со звездообразный ударник проникнет в грунт на большую глубину, чем обычный конический, при одинаковых условиях. Это подтверждается экспериментальными данными [18–22]. Записанные уравнения (17) и (18) говорят о том, что на звездообразный ударник действует меньшая сила лобового сопротивления и соответственно момент сопротивления вращению, чем на конический. По мнению автора, прежде всего разрушительная роль острых лепестков звездообразного ударника дает возможность добиться проникания на большую глубину.

Можно отметить, что при вращении звездообразный ударник будет работать похожим образом, как и шарошки буровой колонны — они непрерывно разрушают грунт, что ведет к снижению его прочности в близлежащих слоях контакта. Только у буровой колонны вращательное движение шарошек поддерживается постоянно, а у звездообразного ударника такой поддержки нет.

Заметим также, что уравнениями (14), (15) и (17), (18) можно пользоваться лишь тогда, когда угловая скорость ω положительна. А утверждение авторов статьи [11], о том, что вращательная составляющая движения обычного конусообразного ударника не может заканчиваться раньше поступательной — является спорным. Трудно с этим согласиться, например, для случая, когда ударник входит в грунт с очень маленькой начальной угловой скоростью вращения, а поступательной — наоборот, очень большой. Тем более, что сделано оно было авторами указанной публикации на основании некорректной модели — что следует из материала данной статьи.

При $\gamma = \pi/2$ записанные уравнения движения (14) и (15) для конического ударника будут соответствовать уравнениям движения для ударника с плоским оголовком.

Заключение

Были получены следующие результаты:

1. Обобщена элементарная теория проникания в грунтовые среды на случай вращательного движения ударника при однократном комбинированном ударе.

2. Элементарная теория проникания ударника в грунтовые среды при однократном ударе соответствует случаю, когда $\Omega_0 \equiv 0$ для введенной здесь обобщенной теории.

3. Объяснена физика влияния комбинированного удара в целом на прочность грунтовой среды и, в частности, его вращательной составляющей.

4. Для ударника определены частные случаи последовательных режимов движения: вращение с погружением, вращение без погружения, погружение без вращения, остановка вращения без погружения — для них установлены допустимые диапазоны изменения начальных скоростей комбинированного удара.

5. Указано, что для вращающегося ударника при проникании применение закона о трении в классической формулировке неприемлемо. Причем как при определении силы бокового трения, так и при определении силы

лобового сопротивления. Здесь общепринятое использование закона Амонтона – Кулона в конечном или дифференциальном виде лишено оснований. Не выполняется необходимое условие применимости закона о трении скольжения: тела скольжения должны двигаться поступательно относительно друг друга [14–16].

6. Приведен пример описания проникания конического ударника в грунт при эффективном комбинированном ударе.

7. Записаны уравнения проникания для звездообразного ударника, где уточнено значение силы лобового сопротивления для звездообразных тел.

8. Дано объяснение, за счет чего достигается большая глубина проникания в грунт звездообразными ударниками в сравнении с обычными коническими.

9. Подвергнуто сомнению существующее утверждение [11], что вращательная составляющая движения ударника не может заканчиваться раньше поступательного погружения.

Литература

1. Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C. R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
2. Poncelet J.V. Traite de mecanique industrielle. 2nd Edition. Bruges, J. Schiwell, 1844.
3. Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, B.G. Teubner, 1922. 484 p.
4. Сагомоян А.А. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
5. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
6. Коронатов В.А. Элементарная теория проникания ударника в твердые грунтовые среды при однократном ударе, с учетом возникающих трещин // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 1 (49). С. 25-33.
7. Коронатов В.А. Дополнения к элементарной теории проникания твердого тела в грунтовые среды при однократном и многократном ударе // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 2 (50). С. 42-50.
8. Коронатов В.А. Применение элементарной теории проникания ударника в грунтовые среды при однократном ударе // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 3 (51). С. 25-34.
9. Пановко Г.Я. Лекции по основам теории вибрационных машин и технологий. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 192 с.
10. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит. по строительству, 1985. 448 с.
11. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 157-191.
12. Митенков Ф.М., Баженов В.Г., Котов В.Л., Тарасова А.А. Численно-аналитический метод исследования устойчивости осесимметричного движения тел вращения в грунтовых средах // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. № 5. С. 531-535.
13. Баженов В.Г., Котов В.Л. Численно-аналитический метод исследования устойчивости движения тел вращения в мягких грунтовых средах // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 688-698.
14. Коронатов В.А. Общий подход к определению сил сопротивления при качении, скольжении тел с верчением, бурении, проникании, сверлении и заглаживании // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 3 (39). С. 24-32.
15. Коронатов В.А. О применении закона Кулона при скольжении тел, движущихся не поступательно, и парадоксах Пенлеве // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 4 (44). С. 25-35.
16. Коронатов В.А. О сухом трении при непоступательном скольжении тела и критика теории Контенсу-Журавлева // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1 (41). С. 21-28.
17. Коронатов В.А. Теория погружения сваи в грунт при продольно-вращательном вдавливании // Системы. Методы. Технологии. 2020. № 4 (48). С. 32-38.
18. Велданов В.А. Проникание в грунт ударников нетрадиционных форм // Механика импульсных процессов // Труды МВТУ. 1989. № 530. С. 85-97.
19. Бивин Ю.К. Сравнительная оценка проникания звездообразных и конических тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 113-117.
20. Yankelevsky D.Z. The optimal shape of an earth penetrating projectile // Intern. J. Solids Struct. 1983. V. 19. № 1. P. 25-31.
21. Ben_Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Modelling of high-speed penetration into concrete shields and shape optimization of impactors // Mech. Based Design Struc. Mach. 2006. V. 34. № 2. P. 139-156.
22. Бондарчук В.С., Ведерников Ю.А., Дулов В.Г., Минин В.Ф. К оптимизации звездообразных ударников // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1982. № 13. Вып. 3. С. 60-65.

References

1. Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C. R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
2. Poncelet J.V. Traite de mecanique industrielle. 2nd Edition. Bruges, J. Schiwell, 1844.
3. Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, B.G. Teubner, 1922. 484 p.
4. Sagomonyan A.A. Penetration. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299 p.
5. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Mathematical modeling of non-stationary processes of impact and penetration of axisymmetric bodies and identification of properties of soil media. M.: Fizmatlit, 2011. 208 p.
6. Koronotov V.A. Elementary theory of impactor penetration into solid soil media during a single impact, taking into account the resulting cracks // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 1 (49). P. 25-33.
7. Koronotov V.A. Additions to the elementary theory of penetration of a solid body into soil media during a single and multiple

- impact // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 2 (50). P. 42-50.
8. Koronатов V.A. Application of the elementary theory of impactor penetration into soil environments with a single impact // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 3 (51). P. 25-34.
 9. Panovko G.YA. Lectures on the fundamentals of the theory of vibration machines and technologies. M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2008. 192 p.
 10. Gol'dsmit V. Blow. Theory and physical properties of colliding bodies. M.: Izd-vo lit. po stroitel'stvu, 1985. 448 p.
 11. Bivin YU.K., Simonov I.V. Mechanics of dynamic penetration into the soil environment // Mechanics of Solids. 2010. № 6. P. 157-191.
 12. Mitenkov F.M., Bazhenov V.G., Kotov V.L., Tarasova A.A. Numerical-analytical method for studying the stability of the axisymmetric motion of bodies of revolution in soil media // Doklady Akademii nauk. 2016. V. 470. № 5. P. 531-535.
 13. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Numerical-analytical method for studying the stability of the motion of bodies of revolution in soft soil media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. V. 81. Vyp. 6. P. 688-698.
 14. Koronатов V.A. General approach to the determination of resistance forces during rolling, sliding of bodies with spinning, drilling, penetration, drilling and smoothing // Systems. Methods. Technologies. 2018. № 3 (39). P. 24-32.
 15. Koronатов V.A. On the application of Coulomb's law for non-translationally moving bodies and the Painlevé paradoxes // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 4 (44). P. 25-35.
 16. Koronатов V.A. On dry friction with non-translational sliding of a body and criticism of the theory of Contensu - Zhuravlev // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 1 (41). P. 21-28.
 17. Koronатов V.A. Theory of pile driving into the soil with longitudinal-rotational indentation // Systems. Methods. Technologies. 2020. № 4 (48). P. 32-38.
 18. Veldanov V.A. Penetration into the soil of strikers of non-traditional forms // Trudy MVTU. 1989. № 530. P. 85-97.
 19. Bivin YU.K. Comparative evaluation of the penetration of star-shaped and conical bodies // Mechanics of Solids. 1999. № 4. P. 113-117.
 20. Yankelevsky D.Z. The optimal shape of an earth penetrating projectile // Intern. J. Solids Struct. 1983. V. 19. № 1. P. 25-31.
 21. Ben_Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Modelling of high speed penetration into concrete shields and shape optimization of impactors // Mech. Based Design Struc. Mach. 2006. V. 34. № 2. P. 139-156.
 22. Bondarchuk B.C., Vedernikov YU.A., Dulov V.G., Minin V.F. On the optimization of star-shaped strikers // Izv. SO AN SSSR. Ser. tekhn. nauk. 1982. № 13. Vyp. 3. P. 60-65.