

Оптимизация многослойной цилиндрической конструкции по критерию кольцевых напряжений

Д.А. Еловенко^a, К.А. Гордеев^b

Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия

^a elovenko03@gmail.com, ^b konstantin.gordeev.1999@mail.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-6520-9268>, ^b <https://orcid.org/0000-0003-3997-4198>

Статья поступила 16.12.2022, принята 03.02.2023

Многослойные цилиндрические конструкции являются компонентами широкого спектра объектов машиностроительных производств. В данной работе предложена математическая модель расчета для поиска оптимальной конфигурации многослойных цилиндрических конструкций по критерию кольцевых напряжений. Авторами проводится анализ кольцевых напряжений в многослойных цилиндрических конструкциях, работающих под действием внутреннего давления, которые имеют изотропные структурные характеристики. Сборка слоев конструкции осуществляется с гарантированным натягом по принципу термоусадки. Проведен теоретический расчет кольцевых напряжений для многослойных цилиндрических конструкций, начиная с однослойной и заканчивая десятислойной. Моделирование и конечно-элементный (КЭ) анализ напряженного состояния для одно-, двух- и трехслойных конструкций выполнен в системе FEMAP. Моделирование натяга между слоями реализовано геометрически в процессе САД-моделирования конструкций. Для оптимизации топологии конечно-элементной сетки был применен метод, основанный на осесимметричности цилиндрических конструкций. Таким образом, при моделировании и КЭ анализе конструкции достаточно использовать сектор 15°, а не полную цилиндрическую конструкцию. Приведены результаты сравнительного анализа математической и КЭ моделей, а также показано влияние степени многослойности (количества слоев по толщине конструкции) на степень неравномерности изменения кольцевых напряжений по толщине конструкции. Даны рекомендации по оптимизации количества слоев в многослойных цилиндрических конструкциях. Показано, что при оптимизации количества слоев цилиндрическая конструкция под давлением остается наиболее эффективной только до третьего слоя включительно. При большем количестве слоев в конструкции процентное снижение кольцевых напряжений и их неравномерности гораздо меньше, чем для трехслойной конструкции.

Ключевые слова: остаточные напряжения; кольцевые напряжения; контактное давление; многослойные цилиндрические конструкции; межслойный натяг.

Optimization of a multilayer cylindrical structure from the point of view of hoop stress analysis

D.A. Elovenco^a, K.A. Gordeev^b

Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia

^a elovenko03@gmail.com, ^b konstantin.gordeev.1999@mail.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-6520-9268>, ^b <https://orcid.org/0000-0003-3997-4198>

Received 16.12.2022, accepted 03.02.2023

Multilayer cylindrical structures are components of a wide range of objects of machine-building industries. In this paper, a mathematical calculation model is proposed to search for the optimal design of multilayer cylindrical structures according to the criterion of ring loads. The authors analyze annular stresses in multilayer cylindrical structures operating under internal pressure, which have isotropic structural characteristics. Assembly of structural layers is carried out with guaranteed tension according to the principle of heat shrinkage. A theoretical calculation of the annular concentration for multilayer cylindrical structures with a single-layer and an installed ten-layer was carried out. Modeling and finite element (FE) analysis of the severity of the state of single-, two- and three-layer structures was performed in the FEMAP system. Modeling tension between layers implements geometric shapes in the process of CAD modeling of structures. For a typical topology of a finite element mesh, a method based on the axisymmetry of a cylindrical structure was used. Thus, in modeling and FE analysis of the design, it is sufficient to use the 15° sector, and not full cylindrical optics. The results of measurement of mathematical and FE models are presented, as well as the significance of the degree of multilayerness (the number of layers in thickness) of the structure on the degree of uneven change in hoop stresses along the thickness of the structure is revealed. Recommendations are given on the number of layers in multilayer cylindrical structures. It is shown that with a sufficient number of layers, the cylindrical structure under pressure remains predominantly high only up to the third layer. With a larger number of layers in the structure, the percentage reduction in load and their unevenness is much less than for a three-layer structure.

Keywords: residual stress; hoop stress; contact pressure; multilayer cylindrical structures; interlayer tension.

Введение. Многослойные цилиндрические конструкции имеют широкое распространение в химическом, атомном, оборонном машиностроении и других отраслях промышленности. Изучению различных многослойных цилиндрических конструкций посвящены многие работы [1–17].

В исследовании [1] описаны конструкции, работающие под воздействием высоких температур, собранные с межслойным зазором. В другой работе рассматривается вопрос применения двухслойных биметаллических конструкций в условиях температурной нагрузки и внутреннего давления как постоянных по значению, так и переменных [2]. В исследованиях Э.Я. Геча и И.Б. Любан приведен пример расчетов многослойных цилиндрических конструкций для кабельной техники [3]. Работа А.Н. Исаева и А.Р. Лебедева посвящена вопросам конечно-элементного (КЭ) моделирования контактных напряжений при формообразовании составных цилиндрических конструкций методом дорнования [4]. Вопрос влияния автофретирования и посадок цилиндров с натягом на прочность конструкции многослойных контейнеров газостатов с целью повышения рабочего давления без утяжеления конструкции либо повышения их надежности рассмотрен в [5]. В работе А.В. Егорова проводится анализ возможности потери устойчивости металлических лайнеров металлокомпозитных баллонов высокого давления путем внутренних прогибов [6]. В исследовании [7] рассматривается вопрос одновременного влияния термоусадки и нагартовки цилиндров многослойных цилиндрических конструкций с целью увеличения рабочего давления. Известен пример расчета многослойных составных цилиндров от 1 до 50 слоев [8], в котором исследовано влияние количества слоев на напряжения сдвига, являвшееся единственной переменной в оптимизации в предлагаемом методе исследования. Авторы отмечают, что с увеличением количества слоев напряжения сдвига стремятся к значению внутреннего давления. В работе [9] также рассматриваются преимущества многослойных цилиндрических конструкций в сравнении с однослойной. Аналитический и КЭ анализ сосудов под давлением, изготовленных из композиционных материалов под действием термомеханических нагрузок, проводятся в работе [10]. Интересная особенность данной работы: авторы уделяют внимание такому вопросу, как влияние закрытых концов сосудов. В известной статье [11] описываются моделирование и анализ многослойных цилиндрических конструкций, находящихся под действием центробежных и температурных нагрузок. Литовские ученые А. Браженас и Д. Вайчулис изучали напряжения при упругопластической деформации неоднородной двухслойной трубы под воздействием внутреннего давления [12]. В исследованиях [13; 14] рассматривается вопрос о применении нагартовки и термоусадки многослойных цилиндров с целью оптимизации конструкции, а также обращается внимание на вопросы усталостной прочности таких конструкций.

В работе П.Г. Пимштейна [15] рассматривается методика расчета сборного многослойного цилиндра с учетом неточностей изготовления, приводящая к появлению контактной податливости материала конструк-

ции под действием внутреннего давления. В статье [16] описывается разработка рекурсивного аналитического решения для многослойных конструкций, работающих под действием температурных и механических нагрузок, а результат был верифицирован с помощью метода КЭ анализа. Также известна работа [17], в которой реализованы аналитический и КЭ анализ трехслойных цилиндров подшипников коленчатого вала двигателя с целью уменьшения решаемых задач на ранних стадиях проектирования.

Проведенный анализ дает понимание о том, что в широком спектре корпусов какого-либо технологического оборудования (сосуды, аппараты, реакторы и т. д.) многослойные цилиндрические конструкции могут работать под действием высокого внутреннего давления. Соответственно требуются улучшение и оптимизация методик расчетов данных конструкций.

Сборка многослойной цилиндрической конструкции может осуществляться в натяг по средствам термоусадочной технологии. Каждый слой такой конструкции может быть рассмотрен как отдельный компонент, подвергающийся усадочному давлению и внутреннему (эксплуатационному) давлению.

Для улучшения прочностных характеристик сборка слоев многослойной конструкции осуществляется с гарантированным натягом, при котором наружный диаметр каждого слоя до сборки больше внутреннего диаметра сопрягаемого с ним последующего слоя в направлении увеличения диаметра конструкции.

В трехслойной конструкции, находящейся под внутренним давлением, внешний слой 3 сопрягается с промежуточным слоем 2, а затем полученная двухслойная конструкция под давлением сопрягается с внутренним слоем 1. Когда внутренний слой сжимается при охлаждении и находится в конструкции в состоянии сжатия, внешний слой наоборот становится растянутым. Под действием внутреннего давления в такой конструкции результирующие кольцевые напряжения будут представлять собой алгебраическую сумму напряжений, возникающих в результате внутреннего давления, и напряжений, возникающих от натяга в слоях.

В настоящем исследовании авторами предложен алгоритм расчета кольцевых напряжений многослойной цилиндрической конструкции, работающей под давлением. Также в работе проведен расчет суммарных натягов и контактных давлений в зонах сопряжения слоев.

Верификация предложенной математической модели и сравнение результатов расчета на основе аналитического алгоритма и численного решения методом конечных элементов с помощью программного комплекса *Femap* проводятся для одно-, двух- и трехслойной цилиндрической конструкции.

Для оптимизации количества слоев многослойной цилиндрической конструкции выполняется расчет кольцевых напряжений вплоть до 10-слойной конструкции и определяется процентное снижение кольцевых напряжений по мере увеличения числа слоев.

Численное и аналитическое решения для расчета кольцевых напряжений в конструкции под давлением рассчитываются путем изменения количества слоев. Внутреннее давление принято равным 32 МПа, а внутренний диаметр — 600 мм. Слои конструкции сопряга-

ются путем термоусадочной посадки между слоями. Толщина рассчитывается по аналитической формуле, и при увеличении количества слоев толщина делится по-ровну. Материал для всех слоев предполагается одинаковым и определен как сталь 10Г2С1 с допускаемыми напряжениями 163 МПа, модулем Юнга 200 000 МПа и коэффициентом Пуассона 0,3.

Математическая модель анализа кольцевых напряжений в цилиндрической конструкции под действием внутреннего давления. Далее с помощью известных источников [18–20] путем соответствующих преобразований нами будут получены выражения для расчета кольцевых напряжений в слоях, а также межслойных контактных давлений и натягов в цилиндрических конструкциях.

1. Однослойная цилиндрическая конструкция под давлением. Определим толщину слоя (t) и наружный диаметр (d_2) для однослойной цилиндрической конструкции под давлением как:

$$t = r_i \left[\sqrt{\frac{\sigma_t + p_i}{\sigma_t - p_i}} - 1 \right]; \quad (1)$$

$$(d_2) = d_i + (2t). \quad (2)$$

Кольцевые напряжения в однослойном цилиндре под давлением определяются уравнением:

$$\sigma_\theta = \frac{P(r_2^2 + r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (3)$$

2. Двухслойная цилиндрическая конструкция под давлением. Кольцевые напряжения, возникающие на внешнем и внутреннем радиусе слоя 1 только от контактного давления (P_{s12}) в зоне сопряжения слоев, имеют вид:

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{-P_{s12}(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{-2P_{s12}(r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (5)$$

Кольцевые напряжения, возникающие на внешнем и внутреннем радиусе слоя 2 только за счет контактного давления (P_{s12}) в зоне сопряжения слоев, определяются уравнениями:

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{2P_{s12}(r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2}; \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta 4} = \frac{P_{s12}(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (7)$$

Кольцевые напряжения от внутреннего давления (P) на внутреннем радиусе слоя 1 определяются уравнением:

$$\sigma_{\theta 5} = \frac{P(r_3^2 + r_1^2)}{r_3^2 - r_1^2}. \quad (8)$$

Кольцевые напряжения от внутреннего давления (P) на внешнем радиусе слоя 1 и внутреннем радиусе слоя 2 определяются уравнением:

$$\sigma_{\theta 6} = \frac{P \cdot r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right]. \quad (9)$$

Кольцевые напряжения, вызванные внутренним давлением (P) на внешнем радиусе слоя 2, определяются уравнением:

$$\sigma_{\theta 7} = \frac{2P \cdot r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}. \quad (10)$$

Результирующие кольцевые напряжения на внутреннем радиусе слоев 1 и 2 определяются уравнениями:

$$\sigma_{\theta r1} = \frac{P(r_3^2 + r_1^2)}{r_3^2 - r_1^2} - \frac{2P_{s12}(r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta r2} = \frac{P \cdot r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right] + \frac{P_{s12}(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (12)$$

3. Расчет контактного давления (P_{s12}) между слоями 1 и 2. Для получения оптимальных значений контактных давлений от натяга в слоях P_{s12} , создающих равные кольцевые напряжения в обоих слоях, были приравнены максимальные кольцевые напряжения, определяемые уравнениями (11) и (12).

Приравняв уравнения (11) и (12), т. е. $\sigma_{\theta r1} = \sigma_{\theta r2}$, и переставляя, получим:

$$P \left[\frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right) \right] = P_{s12} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2(r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} \right];$$

пусть:

$$K_1 = \left[\frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right) \right]; \quad (13)$$

$$K_2 = \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2(r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (14)$$

Таким образом:

$$P_{s12} = P \left[\frac{K_1}{K_2} \right]. \quad (15)$$

Полный натяг между слоями 1 и 2 определяется выражением:

$$\delta_{12} = \frac{P_{s12} \cdot r_2}{E} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (16)$$

4. Трехслойная цилиндрическая конструкция под давлением. На рис. 1 показаны принципиальные эпюры распределения радиальных и кольцевых напряжений в трех отдельных слоях трехслойной цилиндрической конструкции.

На рис. 2 и 3 показаны натяги, возникающие между слоями 1 и 2, 2 и 3. Натяг представляет собой разницу между внешним радиусом внутреннего слоя и внутренним радиусом внешнего слоя. По средствам натяга слои находятся в плотном контакте друг с другом. Кольцевые напряжения, возникающие во внешнем и внутреннем радиусе слоя 1 только за счет контактного давления (P_{s12}), будут иметь вид:

$$\sigma_{\theta 1} = -P_{s12} \left[\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta 1} = - \left[\frac{2P_{s12} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \quad (18)$$

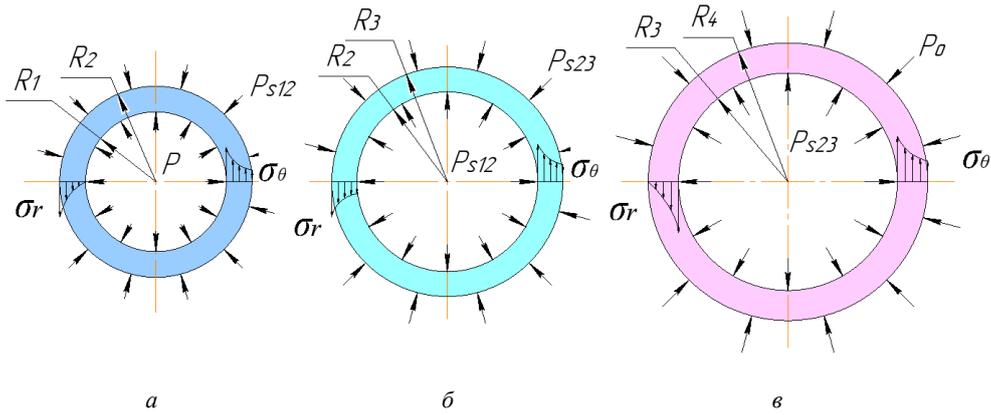


Рис. 1. Эпюры распределения радиальных и кольцевых напряжений в трехслойном цилиндре от воздействия внутреннего и контактных давлений: *a* — цилиндр 1; *b* — цилиндр 2; *c* — цилиндр 3

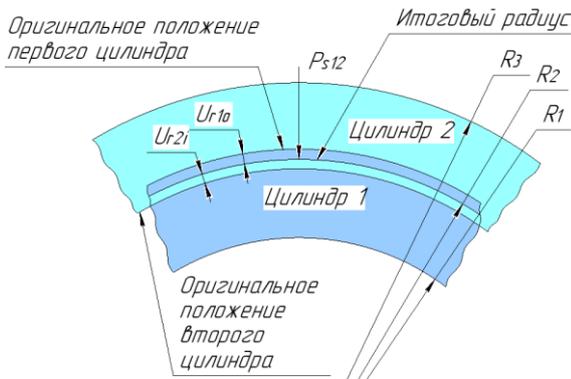


Рис. 2. Схема сопряжения 1-го и 2-го слоев

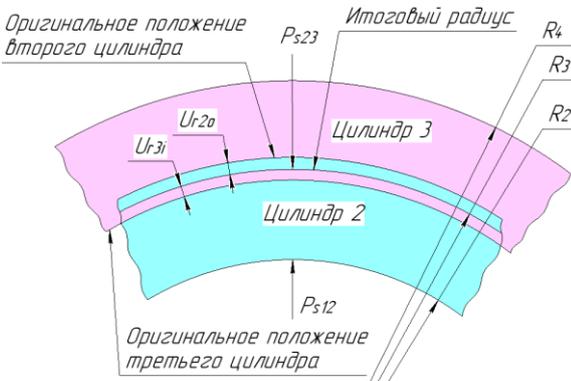


Рис. 3. Схема сопряжения 2-го и 3-го слоев

Радиальное перемещение U_{r1o} за счет контактного давления на внешнем радиусе слоя 1 определяется уравнением:

$$U_{r1o} = \frac{-P_{s12}r_2(1+V)}{E} \left[(1-V) \left(\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2} \right) - V \right]. \quad (19)$$

Кольцевые напряжения, возникающие на внешнем и внутреннем радиусе слоя 2 только за счет контактного давления (P_{s12} и P_{s23}), определяются уравнениями:

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{2P_{s12}r_2^2}{r_3^2-r_2^2} - \frac{P_{s23}(r_3^2+r_2^2)}{r_3^2-r_2^2}, \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta 4} = \frac{P_{s12}(r_3^2+r_2^2)}{r_3^2-r_2^2} - \frac{P_{s23}r_3^2}{r_3^2-r_2^2}. \quad (21)$$

Радиальное перемещение U_{r2i} от контактного давления на внутреннем радиусе слоя 2 определяется уравнением:

$$U_{r2i} = \frac{r_2(1+V)}{E} \left[P_{s12} \left((1-V) \left(\frac{r_3^2+r_2^2}{r_3^2-r_2^2} \right) + V \right) - (1-V) \left(\frac{2P_{s23}r_3^2}{r_3^2-r_2^2} \right) \right]. \quad (22)$$

Используя уравнения (19) и (22), общая интерференция δ_{12} на контакте между слоями 1 и 2 определяется уравнением:

$$\delta_{12} = U_{r2i} - U_{r1o};$$

$$\delta_{12} = \frac{r_2(1-V^2)}{E} \left[P_{s12} \left(\frac{r_3^2+r_2^2}{r_3^2-r_2^2} + \frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2} \right) - 2P_{s23} \left(\frac{r_3^2}{r_3^2-r_2^2} \right) \right]. \quad (23)$$

Радиальное перемещение U_{r2o} за счет контактного давления на внешнем радиусе слоя 2 определяется уравнением:

$$U_{r2o} = \frac{r_3}{E} \left[\frac{2P_{s12}(1-V^2)r_2^2}{r_3^2-r_2^2} - P_{s23}(1+V) \left((1-V) \left(\frac{r_3^2+r_2^2}{r_3^2-r_2^2} \right) - V \right) \right]. \quad (24)$$

Кольцевые напряжения, возникающие во внешнем и внутреннем радиусе слоя 3 только за счет контактного давления (P_{s23}), будут иметь вид:

$$\sigma_{\theta 5} = \frac{2P_{s23}r_3^2}{r_4^2-r_3^2}, \quad (25)$$

$$\sigma_{\theta 6} = \frac{P_{s23}(r_4^2+r_3^2)}{r_4^2-r_3^2}. \quad (26)$$

Радиальное смещение U_{r3i} за счет контактного давления на внутреннем радиусе слоя 3 определяется уравнением,

$$U_{r3i} = \frac{P_{s23}r_3(1+V)}{E} \left[(1-V) \left(\frac{r_4^2+r_3^2}{r_4^2-r_3^2} \right) + V \right]. \quad (27)$$

Используя уравнения (24) и (27), полный натяг δ_{23} на контакте между слоями 2 и 3 определим как:

$$\delta_{23} = U_{r3i} - U_{r2o};$$

$$\delta_{23} = \frac{r_3(1-V^2)}{E} \left[P_{s23} \left(\frac{r_4^2+r_3^2}{r_4^2-r_3^2} + \frac{r_3^2+r_2^2}{r_3^2-r_2^2} \right) - \frac{2P_{s12}r_2^2}{r_3^2-r_2^2} \right]. \quad (28)$$

Кольцевое напряжение на любом радиусе r в цилиндрической конструкции под давлением только от внутреннего давления определяется выражением:

$$\sigma_{\theta} = \frac{Pr_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \left[\frac{r_4^2}{r^2} + 1 \right]. \quad (29)$$

После определения кольцевых напряжений на всех радиусах применяется принцип суперпозиции, т. е. различные напряжения алгебраически комбинируются для получения результирующих кольцевых напряжений в составной цилиндрической конструкции, подверженной как давлению от натяга, так и внутреннему давлению P .

Используя уравнения (29) и (18), максимальное кольцевое напряжение на внутренних поверхностях слоя 1 при r_1 определяется уравнением:

$$\sigma_{\theta r_1} = P \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - 2P_{s12} \left[\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (30)$$

Используя уравнения (29) и (21), максимальное кольцевое напряжение на внутренних поверхностях слоя 2 при r_2 определяется уравнением:

$$\sigma_{\theta r_2} = \frac{Pr_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] + \frac{P_{s12}(r_3^2 + r_2^2) - 2P_{s23}r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (31)$$

Используя уравнения (26) и (29), максимальное кольцевое напряжение на внутренних поверхностях слоя 3 при r_3 определяется уравнением:

$$\sigma_{\theta r_3} = \frac{Pr_1^2}{r_3^2} \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] + P_{s23} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} \right]. \quad (32)$$

5. Расчет контактных давлений P_{s12} и P_{s23} . Для получения оптимальных значений контактных давлений от натяга в слоях P_{s12} и P_{s23} , создающих одинаковые кольцевые (растягивающие) напряжения во всех трех слоях, были приравнены максимальные кольцевые напряжения, определяемые уравнениями (30), (31) и (32).

Приравнивая уравнения (30) и (31), т. е. $\sigma_{\theta r_1} = \sigma_{\theta r_2}$, в результате получим:

$$P_{s12} \left[\frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right] = P \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] \right] + P_{s23} \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (33)$$

Пусть коэффициенты:

$$t_1 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1}, t_2 = \frac{r_3}{r_2} = \frac{d_3}{d_2}, t_3 = \frac{r_4}{r_3} = \frac{d_4}{d_3},$$

где d_1, d_2, d_3, d_4 диаметры, соответствующие радиусам r_1, r_2, r_3, r_4 , пусть:

$$C_1 = \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad (34)$$

$$C_2 = \frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right], \quad (35)$$

Таблица 1. Результат аналитического расчета для однослойной конструкции

Расчет	t, мм	d ₂ , мм	σ _θ , МПа
Аналитический	66	732	163,04

$$C_3 = \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (36)$$

Следовательно, уравнение (33) принимает вид:

$$P_{s12} = P \left[\frac{C_2}{C_1} \right] + P_{s23} \left[\frac{C_3}{C_1} \right]. \quad (37)$$

Приравнивая уравнения (31) и (32), т. е. $\sigma_{\theta r_2} = \sigma_{\theta r_3}$, в результате получим:

$$P_{s12} \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = P \left[\frac{r_1^2(r_4^2 + r_3^2)}{r_3^2(r_4^2 - r_1^2)} - \frac{r_1^2(r_4^2 + r_2^2)}{r_2^2(r_4^2 - r_1^2)} \right] + P_{s23} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \right], \quad (38)$$

пусть:

$$C_4 = \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad (39)$$

$$C_5 = \frac{r_1^2(r_4^2 + r_3^2)}{r_3^2(r_4^2 - r_1^2)} - \frac{r_1^2(r_4^2 + r_2^2)}{r_2^2(r_4^2 - r_1^2)}, \quad (40)$$

$$C_6 = \frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (41)$$

Следовательно, уравнение (38) принимает вид:

$$P_{s12} = P \left[\frac{C_5}{C_4} \right] + P_{s23} \left[\frac{C_6}{C_4} \right]. \quad (42)$$

Уравнения (37) и (42) были решены, чтобы получить P_{s12} и P_{s23} через P следующим образом:

$$P_{s12} = P \left[\frac{(C_5/C_6) - (C_2/C_3)}{(C_4/C_6) - (C_1/C_3)} \right], \quad (43)$$

$$P_{s23} = P \left[\frac{(C_5/C_4) - (C_2/C_1)}{(C_3/C_1) - (C_6/C_4)} \right]. \quad (44)$$

Подставив значения t_1, t_2 и t_3 , уравнения (23) и (28) можно записать в виде:

$$\delta_{12} = \frac{r_2(1-V^2)}{E} \left[P_{s12} \left(\frac{t_2^2 + 1}{t_2^2 - 1} + \frac{t_1^2 + 1}{t_1^2 - 1} \right) - 2P_{s23} \left(\frac{t_2^2}{t_2^2 - 1} \right) \right]; \quad (45)$$

$$\delta_{23} = \frac{r_3(1-V^2)}{E} \left[P_{s23} \left(\frac{t_3^2 + 1}{t_3^2 - 1} + \frac{t_2^2 + 1}{t_2^2 - 1} \right) - \frac{2P_{s12}}{t_2^2 - 1} \right]. \quad (46)$$

6. Результаты аналитического расчета для 1-, 2- и 3-слойных цилиндрических конструкций под давлением. Результаты анализа для однослойной конструкции, работающей под внутренним давлением с параметрами $P = 32$ МПа, $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 732$ мм, представлены в табл. 1.

Результаты анализа для двухслойной конструкции, работающей под внутренним давлением с параметрами $P = 32$ МПа, $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 666$ мм, $d_3 = 732$ мм, представлены в табл. 2.

Аналитические результаты расчета для трехслойной конструкции, работающей под внутренним давлением с параметрами $P = 32$ МПа, $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 644$ мм, $d_3 = 688$ мм, $d_4 = 732$ мм, приведены в табл. 3.

Таблица 2. Результат аналитического расчета для двухслойной конструкции

Расчет	$P_{s12}, \text{МПа}$	$\delta_{12}, \text{мм}$	$\sigma_{\theta 1}, \text{МПа}$	$\sigma_{\theta 2}, \text{МПа}$
Аналитический	0,865	0,029	153,854	153,854

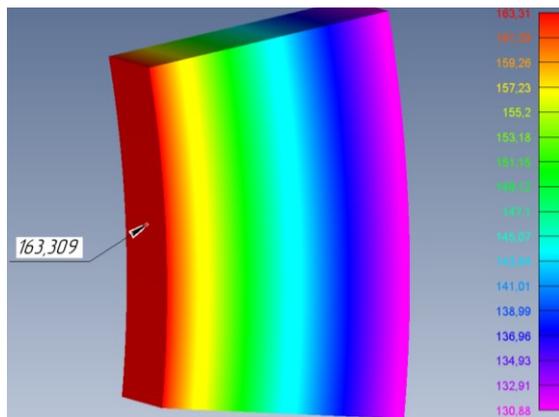
Таблица 3. Результат аналитического расчета для трехслойной конструкции

Расчет	$P_{s12}, \text{МПа}$	$P_{s23}, \text{МПа}$	$\delta_{12}, \text{мм}$	$\delta_{23}, \text{мм}$	$\sigma_{\theta 1}, \text{МПа}$	$\sigma_{\theta 2}, \text{МПа}$	$\sigma_{\theta 3}, \text{МПа}$
Аналитический	0,797	0,698	0,018	0,017	150,966	150,966	150,966

Верификация полученной математической модели анализа кольцевых напряжений. Для оценки точности и достоверности полученных выше результатов анализа кольцевых напряжений были созданы компьютерные КЭ модели, обладающие эквивалентными геометрическими и структурными характеристиками. Используя известные значения межслойных натягов δ_{12} и δ_{23} , получаемых в результате технологического процесса термоусадочной посадки между слоями 1 и 2 и слоями 2 и 3 соответственно. Контактные взаимодействия между слоями 1 и 2, а также между слоями 2 и 3, в КЭ модели определяются с помощью соответствующего инструмента моделирования в программном комплексе *Femap*.

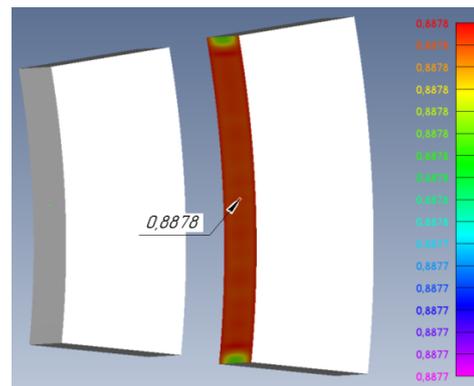
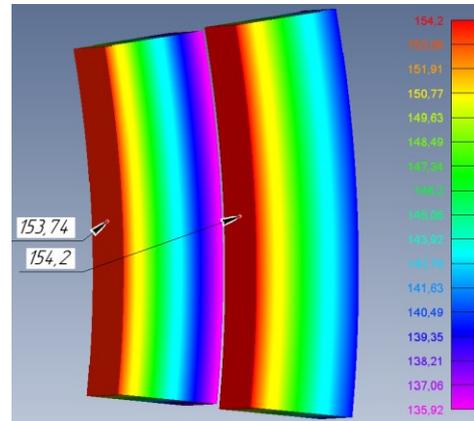
Анализ однослойной конструкции. Для формирования КЭ модели и ее анализа были определены следующие геометрические параметры: $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 732$ мм. Сравнение результатов аналитического и численного решения представлено в табл. 4.

Результаты известного исследования авторов [14] показывают, что для моделирования осесимметричных цилиндрических конструкций достаточно использовать сектор и не проводить анализ полной конструкции на 360° . На рис. 4–8 представлены распределения кольцевых напряжений, полученные в результате анализа КЭ моделей 1-, 2- и 3-слойных цилиндрических конструкций, для секторов с углом под 15° .

**Рис. 4.** Распределение кольцевых напряжений в однослойной конструкции**Таблица 4.** Результаты расчета однослойной цилиндрической конструкции, находящейся под внутренним давлением 32 МПа

Расчет	Кольцевое напряжение $\sigma_{\theta}, \text{МПа}$
Аналитический	163,04
КЭМ	163,309
Отклонение, %	0,16

Анализ двухслойной конструкции. Геометрические параметры моделируемого объекта определены следующим образом: $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 666$ мм, $d_{21} = 665,942$ мм, $d_3 = 732$ мм. Сравнение результатов аналитического и КЭ анализа представлено в табл. 5.

**Рис. 5.** Распределение контактных напряжений между слоями в двухслойной конструкции**Рис. 6.** Распределение кольцевых напряжений в двухслойной конструкции**Таблица 5.** Результаты расчета двухслойной цилиндрической конструкции, находящейся под внутренним давлением 32 МПа

Расчет	$P_{s12}, \text{МПа}$	$\sigma_{\theta 1}, \text{МПа}$	$\sigma_{\theta 2}, \text{МПа}$
Аналитический	0,865	153,854	153,854
КЭМ	0,8878	153,74	154,2
Отклонение, %	2,63	0,074	0,22

Анализ трехслойной конструкции. Геометрические параметры моделируемой конструкции определены следующим образом: $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 644$ мм, $d_{21} = 643,964$ мм, $d_3 = 688$ мм, $d_{31} = 687,966$ мм, $d_4 = 732$ мм. Сравнение результатов аналитического и КЭ анализа представлено в табл. 6.

Таблица 6. Результаты расчета трехслойной цилиндрической конструкции, находящейся под внутренним давлением 32 МПа

Расчет	$P_{s12}, \text{МПа}$	$P_{s23}, \text{МПа}$	$\sigma_{\theta 1}, \text{МПа}$	$\sigma_{\theta 2}, \text{МПа}$	$\sigma_{\theta 3}, \text{МПа}$
Аналитический	0,797	0,698	150,966	150,966	150,966
КЭМ	0,8133	0,7149	150,82	151,04	151,3
Отклонение, %	2,045	2,421	0,097	0,049	0,221

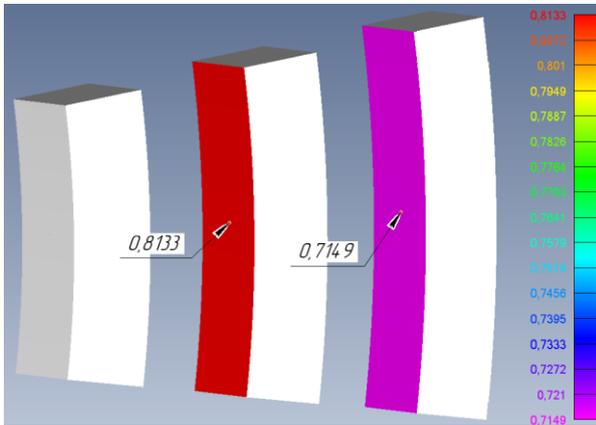


Рис. 7. Распределение контактных напряжений между слоями в трехслойной конструкции

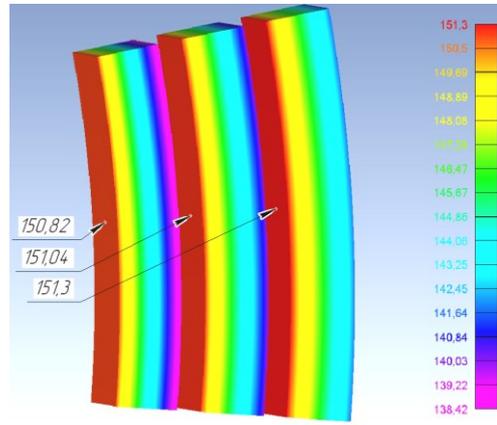


Рис. 8. Распределение кольцевых напряжений в трехслойной конструкции

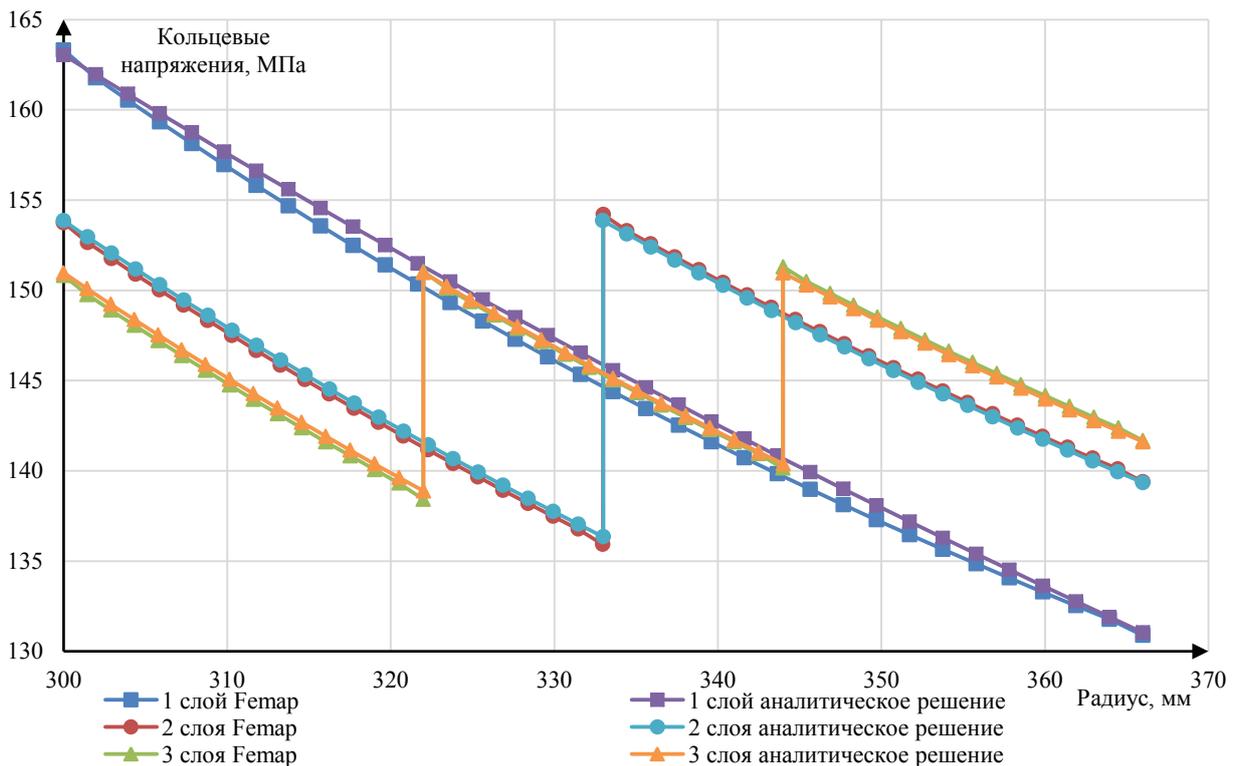


Рис. 9. График распределения кольцевых напряжений в многослойных цилиндрических конструкциях

Для наглядного представления отклонений теоретических расчетов и КЭ анализа показано распределение кольцевых напряжений по радиусу в виде графика (рис. 9). На графике видно, что погрешность не превышает допустимой на любом расчетном радиусе.

Аналитическая оценка кольцевых напряжений в сосуде высокого давления, состоящем из n слоев. Для расчета кольцевых напряжений в цилиндрической конструкции под давлением, имеющей более трех сло-

ев, необходимо использовать другое уравнение. Эти уравнения выводятся из основного уравнения для расчета кольцевых напряжений за меньшее время и с минимальными усилиями.

Уравнение для расчета кольцевых напряжений в цилиндрической конструкции имеет вид:

$$\sigma_{\theta} = -P_o + \frac{P+P_o}{F-1}. \quad (47)$$

Уравнение (47) предназначено для расчета кольцевого напряжения в многослойной цилиндрической конструкции, где: $F = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \dots \cdot C_r \cdot C_{r+1} \dots \cdot C_n$,

$$C_{r+1} \text{ и м е е т в и д, } C_{r+1} = \frac{2K_r^2 + 1}{1 + K_r^2} \text{ и } K_{r+1} = \frac{d_{r+1}}{d_r}.$$

Оптимизация количества слоев в цилиндрической конструкции, работающей под внутренним давлением. Проведенный анализ показывает, что с увеличением количества слоев кольцевое напряжение уменьшается. Но при детальном рассмотрении видно, что снижение величины кольцевого напряжения неравномерно по каждому слою.

Таким образом, необходимо знать оптимальное значение количества слоев (n) для цилиндрической кон-

струкции, работающей под давлением, чтобы свести к минимуму технологические затраты, связанные с процессом изготовления и сборки избыточного количества слоев и, как следствие, снизить стоимость изготовления какого-либо объекта машиностроительного производства, в составе которого находится одна или несколько многослойных цилиндрических конструкций. По результатам аналитического расчета определена необходимая толщина стенки цилиндра, равная 66 мм. Толщина слоев многослойных конструкций разделяется между слоями поровну. Для оценки и сравнения кольцевых напряжений на внутренней поверхности цилиндров были произведены расчеты для многослойных цилиндрических конструкций до 10 слоев. Результаты расчета сведены в табл. 7. По результатам расчета построен график (рис. 10).

Таблица 7. Влияние количества слоев на кольцевые напряжения в многослойной цилиндрической конструкции

Количество цилиндров	Толщина стенки одного компонента (цилиндрического слоя) t , мм	Максимальное σ_θ , МПа	Снижение кольцевых напряжений, %
1	66	163,04	–
2	33	153,854	5,63
3	22	150,966	1,88
4	16,5	149,555	0,93
5	13,2	148,719	0,56
6	11	148,166	0,37
7	9,43	147,773	0,27
8	8,25	147,48	0,20
9	7,33	147,252	0,15
10	6,6	147,071	0,12

Кроме того, по мере увеличения количества слоев уменьшается степень (скорость) изменения кольцевых напряжений. Это показывает, что эффективность слоев для снижения кольцевых напряжений снижается с увеличением количества слоев.

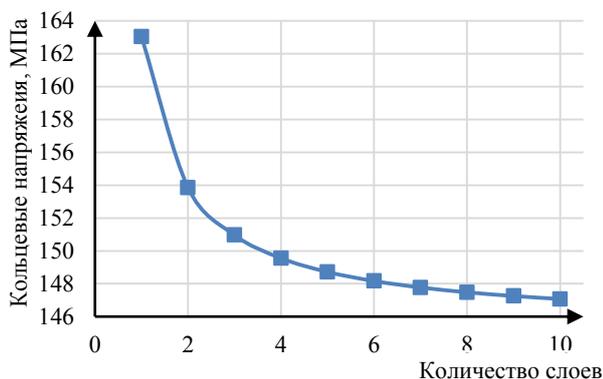


Рис. 10. График зависимости кольцевых напряжений от количества слоев в конструкции из 10 слоев

Заключение. Аналитический расчет показывает, что максимальное кольцевое напряжение на внутренней поверхности цилиндров для однослойной цилиндрической конструкции под давлением составляет 163,04 МПа, для двухслойной цилиндрической кон-

струкции под давлением — 153,854 МПа, для трехслойной цилиндрической конструкции под давлением — 150,966 МПа.

Полученные результаты дают право сделать следующие выводы:

- Многослойная цилиндрическая конструкция является оптимальным конструктивным решением для какого-либо оборудования, работающего под высоким давлением.
- Сравнительные наблюдения показали, что увеличение количества слоев снижает кольцевые напряжения в цилиндрической конструкции.
- Наличие нескольких слоев снижает кольцевые напряжения на самой внутренней поверхности (первого слоя) цилиндрической конструкции и может уменьшить разницу между максимальным и минимальным кольцевым напряжением по сравнению с монолитной конструкцией.
- При оптимизации количества слоев (n), цилиндрическая конструкция под давлением остается наиболее эффективной только до 3-х слоев включительно. При большем количестве слоев в конструкции процентное снижение кольцевых напряжений гораздо меньше, чем для 3-х слоев ($n > 3$).

Таблица 8. Условные обозначения

P	Внутреннее давление, МПа
σ_θ	Кольцевое напряжение в слоях, МПа
$\sigma_{\theta r1}$	Результирующее кольцевое напряжение в слое 1, МПа
$\sigma_{\theta r2}$	Результирующее кольцевое напряжение в слое 2, МПа
$\sigma_{\theta r3}$	Результирующее кольцевое напряжение в слое 3, МПа
d_1	Внутренний диаметр слоя 1, мм
d_2	Внешний диаметр слоя 1 и внутренний диаметр слоя 2, мм
d_3	Внешний диаметр слоя 2 и внутренний диаметр слоя 3, мм
d_4	Внешний диаметр слоя 3, мм
r_1	Внутренний радиус слоя 1, мм
r_2	Внешний радиус слоя 1 и внутренний радиус слоя 2, мм
r_3	Внешний радиус слоя 2 и внутренний радиус слоя 3, мм
r_4	Внешний радиус слоя 3, мм
P_{S12}	Контактное давление между слоями 1 и 2, МПа
P_{S23}	Контактное давление между слоями 2 и 3, МПа
U_{r1o}	Радиальное смещение на внешней стенке слоя 1, мм
U_{r2i}	Радиальное смещение на внутренней стенке слоя 2, мм
δ_{12}	Полная интерференция на контакте между слоями 1 и 2, мм
U_{r2o}	Радиальное смещение на внешней стенке слоя 2, мм
U_{r3i}	Радиальное смещение на внутренней стенке слоя 3, мм
δ_{23}	Суммарная интерференция на контакте между слоями 2 и 3, мм
ν	Коэффициент Пуассона

Литература

1. Миронова Л.И., Гуров В.А. Модели осесимметричного упругопластического состояния кольца или цилиндра в методах оптимального проектирования оболочечных конструкций // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2014. № 2. С. 69-74.
2. Бикбулатов А.Л., Багманов Р.Р., Гумеров К.М. Особенности напряженно-деформированного состояния двухслойных труб в условиях нестационарных термомеханических воздействий // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2015. № 2. С. 120-126.
3. Геча Э.Я., Любан И.Б. Радиальная жесткость многослойных цилиндрических конструкций // Фотон-экспресс. 2006. № 6. С. 163-171.
4. Исаев А.Н., Лебедев А.Р. Исследование контактных напряжений в процессе локального кольцевого упругопластического деформирования составного цилиндра // Advanced Engineering Research. 2012. Т. 12. № 22. С. 25-31.
5. Корчак Е.С., Андреев А.А. Исследование влияния процесса автофреттирования на прочностные характеристики многослойных контейнеров промышленных газостатов // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2015. № 1. С. 57-61.
6. Егоров А.В. Формы возможных отслоений лайнера в металлокомпозитном баллоне высокого давления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 8 (92). С. 1-12.
7. Seifi R. Maximizing working pressure of autofrettaged three-layer compound cylinders with considering Bauschinger effect and reverse yielding // Meccanica. 2018. № 53. P. 2485-2501.
8. Sharifi M., Hematiyan M.R., Banan R.A. New Analytical Solution for Optimum Design of Shrink-Fit Multi-Layer Compound Cylinders // Proceedings of the ASME 2012 Pressure Vessels and Piping Conference. Volume 5: High-Pressure Technology; ASME NDE Division. (Toronto, Ontario, Canada. July 15-19, 2012 y.). Toronto, 2012. P. 75-81.
9. Suvarna Y., Ravisekhar B. Modeling and analysis of multi-layer high-pressure vessels // International Journal of Science technology and Management. 2016. № 9. P. 52-60.
10. Zhang Q.G. Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2012. № 98. P. 102-110.
11. Bai Z. Contact Pressure Algorithm of Multi-Layer Interference Fit Considering Centrifugal Force and Temperature Gradient // Applied Sciences. 2018. № 8 (5). P. 1-12.
12. Brazenas A., Vaiculis D. Determination of stresses and strains in two-layer mechanically inhomogeneous pipe subjected to internal pressure at elastic plastic loading // Mechanika. 2009. V. 80. № 6. P. 12-17.
13. Farshi, Karimi, Morvarid. Optimum Autofrettage and Shrink-Fit Combination in Multi-Layer Cylinders // Journal of Pressure Vessel Technology. 2006. V. 128. P. 196-200.
14. Kumar N. Optimum autofrettage pressure and shrink-fit combination for minimum stress in multilayer pressure vessel // International Journal of Engineering Science & Technology. 2011. V. 3. № 5. P. 4020-4030.
15. Pimshtein P.G. Strength of multilayer high-pressure vessels // Chem Petrol Eng. 1968. № 4. P. 574-578.
16. Vedeld K., Sollund H.A. Stresses in Heated Pressurized Multi-Layer Cylinders in Generalized Plane Strain Conditions // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2014. V. 120-121. P. 27-35.
17. Qiu J., Zhou M. Analytical Solution for Interference Fit for Multi-Layer Thick-Walled Cylinders and the Application in Crankshaft Bearing Design // Applied Sciences. 2016. № 6. № 167. P. 1-20.
18. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М.: Высш. школа, 1968. 200 с.
19. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. 2-е изд. М.: Высш. школа, 1982. 264 с.

20. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
 21. Гордеев К.А., Еловенко Д.А. Метод моделирования НДС многослойных цилиндрических конструкций под давлением, собранных с межслойными натягами // Модели инновационных решений повышения конкурентоспособности Отечественной науки: сб. ст. Всерос. науч.-практической конф. с междунар. участием (Оренбург, 28 окт. 2022 г.). Уфа, 2022. С. 21-28.
- References*
1. Mironova L.I., Gurov V.A. Models of axisymmetric elastoplastic state of a ring or cylinder in methods of optimal design of shell structures // Engineering and Automation Problems. 2014. № 2. P. 69-74.
 2. Bikbulatov A.L., Bagmanov R.R., Gumerov K.M. Features of the stress-strain state of two-layer pipes under conditions of non-stationary thermomechanical effects // Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products. 2015. № 2. P. 120-126.
 3. Gecha E.YA., Lyuban I.B. Radial stiffness of multilayer cylindrical structures // Foton-ekspres. 2006. № 6. P. 163-171.
 4. Isaev A.N., Lebedev A.R. Investigation of contact stresses in the process of local annular elastoplastic deformation of a compound cylinder // Advanced Engineering Research. 2012. V. 12. № 22. P. 25-31.
 5. Korchak E.S., Andreev A.A. Investigation of the influence of the autofrettage process on the strength characteristics of multilayer containers of industrial gasostats // Novi materiali i tehnologiji v metalurgiji ta mashinobuduvanni. 2015. № 1. P. 57-61.
 6. Egorov A.V. Forms of possible liner delaminations in a metal-composite high-pressure cylinder // Engineering Journal: Science and Innovation. 2019. № 8 (92). P. 1-12.
 7. Seifi R. Maximizing working pressure of autofrettaged three-layer compound cylinders with considering Bauschinger effect and reverse yielding // Meccanica. 2018. № 53. P. 2485-2501.
 8. Sharifi M., Hematiyan M.R., Banan R.A. New Analytical Solution for Optimum Design of Shrink-Fit Multi-Layer Compound Cylinders // Proceedings of the ASME 2012 Pressure Vessels and Piping Conference. Volume 5: High-Pressure Technology; ASME NDE Division. (Toronto, Ontario, Canada. July 15-19, 2012 u.). Toronto, 2012. P. 75-81.
 9. Suvarna Y., Ravisekhar B. Modeling and analysis of multilayer high-pressure vessels // International Journal of Science technology and Management. 2016. № 9. P. 52-60.
 10. Zhang Q.G. Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2012. № 98. P. 102-110.
 11. Bai Z. Contact Pressure Algorithm of Multi-Layer Interference Fit Considering Centrifugal Force and Temperature Gradient // Applied Sciences. 2018. № 8 (5). P. 1-12.
 12. Brazenas A., Vaiciulis D. Determination of stresses and strains in two-layer mechanically inhomogeneous pipe subjected to internal pressure at elastic plastic loading // Mechanika. 2009. V. 80. № 6. P. 12-17.
 13. Farshi, Karimi, Morvarid. Optimum Autofrettage and Shrink-Fit Combination in Multi-Layer Cylinders // Journal of Pressure Vessel Technology. 2006. V. 128. P. 196-200.
 14. Kumar N. Optimum autofrettage pressure and shrink-fit combination for minimum stress in multilayer pressure vessel // International Journal of Engineering Science & Technology. 2011. V. 3. № 5. P. 4020-4030.
 15. Pimshtein P.G. Strength of multilayer high-pressure vessels // Chem Petrol Eng. 1968. № 4. P. 574-578.
 16. Vedeld K., Sollund H.A. Stresses in Heated Pressurized Multi-Layer Cylinders in Generalized Plane Strain Conditions // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2014. V. 120-121. P. 27-35.
 17. Qiu J., Zhou M. Analytical Solution for Interference Fit for Multi-Layer Thick-Walled Cylinders and the Application in Crankshaft Bearing Design // Applied Sciences. 2016. № 6. № 167. P. 1-20.
 18. Bezuhov N.I., Luzhin O.V. Application of methods of the theory of elasticity and plasticity to solving engineering problems. M.: Vyssh. shkola, 1968. 200 p.
 19. Samul' V.I. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. 2-e izd. M.: Vyssh. shkola, 1982. 264 p.
 20. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1975. 576 p.
 21. Gordeev K.A., Elovenko D.A. Method for modeling SSS of multilayer cylindrical structures under pressure assembled with interlayer tensions // Modeli innovacionnyh reshenij povysheniya konkurentosposobnosti Otechestvennoj nauki: sb. st. Vseros. nauch.-prakticheskoy konf. s mezhdunar. uchastiem (Orenburg, 28 okt. 2022 g.). Ufa, 2022. P. 21-28.