

## Практическая реализация аналитического метода исследования плоских механических систем, основанного на индексных операциях с массивами

А.Н. Панасенко

Иркутский государственный университет путей сообщения, Чернышевского, 15, Иркутск, Россия,

panasenکو\_an@irgups.ru

<https://orcid.org/0009-0008-2873-7174>

Статья поступила 13.03.2025, принята 17.05.2025

*В статье приведены два примера анализа плоских механизмов аналитическим методом. Анализ основан на описании плоского механизма при помощи пяти характеристических матриц. В качестве характеристических используются: матрица инцидентности, матрицы функций положения звеньев и соединений, матрица инерционных характеристик подвижных звеньев механизма и матрица активного силового воздействия. В результате преобразования этих матриц получаются три коэффициента дифференциального уравнения движения механизма и шестая матрица – матрица сил реакции соединений. Для практической реализации предлагаемого алгоритма необходим математический пакет с возможностью символьных вычислений. Для одноподвижных механизмов вполне подходит MathCAD, используемый автором в учебном процессе. Для научных исследований и для механизмов с несколькими степенями свободы рекомендуется использовать Maple или Mathematica. В примере анализа относительно простого кривошипно-ползунного механизма (КПМ) выражения для всех величин получены в аналитической форме как функции обобщенной координаты. В качестве второго примера выбран существенно более сложный шестизвенный одноподвижный механизм, содержащий структурную группу Ассур 4-го класса с вращательными кинематическими парами. Показано, что реализация предлагаемого алгоритма для такого механизма с использованием объемных матриц требует минут процессорного времени. Введено понятие сложности функций положения механизма, основанного на правиле смежных треугольников. Продемонстрирован алгоритм уточнения числа степеней свободы механизма с использованием матрицы Якоби, поскольку формулы Чебышева, Сомова-Малышева дают только оценку снизу этой величины. Показаны проверки, которым должны удовлетворять формируемые исследователем характеристические матрицы. Алгоритм анализа плоских механизмов заканчивается картиной анимации механизма, где на каждом кадре могут быть выведены необходимые для анализа векторы скоростей, ускорений, а также активных сил, сил инерции, приведенных к центру масс каждого звена и сил реакции, приведенных к центру каждого соединения.*

**Ключевые слова:** плоский механизм; число степеней свободы; голономные связи; функции положения; дифференциальные уравнения движения; обобщенные координаты; обобщенные силы; характеристические матрицы; индексные операции; реакции кинематических пар; анимация движения механизма.

## Practical implementation of the analytical method of investigation of flat mechanical systems based on index operations with arrays

A.N. Panasenکو

Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia

panasenکو\_an@irgups.ru

<https://orcid.org/0009-0008-2873-7174>

Received 13.03.2025, accepted 17.05.2025

*The paper presents two examples of analytical analysis of flat mechanisms. The analysis is based on the description of the flat mechanism by means of five characteristic matrices, namely, incidence matrix, matrices of the functions of the positions of links and joints, matrix of inertial characteristics of the moving links of the mechanism, and matrix of active force action. As a result of the transformation of these matrices, three coefficients of the differential equation of motion of the mechanism and a sixth matrix - the matrix of the reaction forces of the joints are obtained. For the practical implementation of the proposed algorithm, a mathematical package with the ability to perform symbolic calculations is necessary. For single-motion mechanisms, MathCAD, used by the author in the educational process, is quite suitable. For scientific research and for mechanisms with several degrees of freedom, it is recommended to use Maple or Mathematica. In the example of the analysis of a relatively simple slider-crank mechanism (SCM), expressions for all quantities are obtained in analytical form as functions of a generalized coordinate. As a second example, a significantly more complex six-link single-motion mechanism containing the 4th class Assur structural group with rotational kinematic pairs is selected. It is shown that the implementation of the proposed algorithm for such a mechanism using volumetric matrices requires minutes of processor time. The concept of complexity of the position functions of a mechanism based on the adjacent triangle rule is introduced. An algorithm for refining the number of degrees of freedom of a mechanism using the Jacobi matrix is demonstrated, since the Chebyshev and Somov-Malyshev formulas only give a lower estimate for this value. The checks, which must be satisfied by the characteristic matrices formed by the researcher, are shown. The algorithm for analyzing flat mechanisms ends with an animation of the mechanism, where the vectors*

of velocities, accelerations, as well as active forces, inertial forces reduced to the center of mass of each link and reaction forces reduced to the center of each connection, necessary for the analysis, can be displayed on each frame.

**Keywords:** flat mechanism, number of degrees of freedom, holonomic constraints, position functions, differential equations of motion, generalized coordinates, generalized forces, characteristic matrices, index operations, reactions of kinematic pairs, animation of mechanism motion.

**Введение.** Алгоритм исследования плоских механических систем аналитическим методом изложен в [1–3]. В настоящей статье приведены два примера практической реализации этого алгоритма. Первым простым примером является исследование кривошипно-ползунного механизма (КПМ) с тремя подвижными звеньями. В качестве второго примера выбран более сложный механизм, в состав которого входит структурная группа Ассура четвертого класса.

Алгоритм для любого механизма состоит из пяти этапов анализа: структурного, геометрического, кинематического, динамического и силового.

**Структурный анализ КПМ.** Изобразив структурную схему КПМ (рис. 1), в первую очередь нужно установить количество его подвижных звеньев  $N_s = 3$  и соединений  $N_g = 4$ . Для удобства можно дать названия звеньям и установить вид соединений.

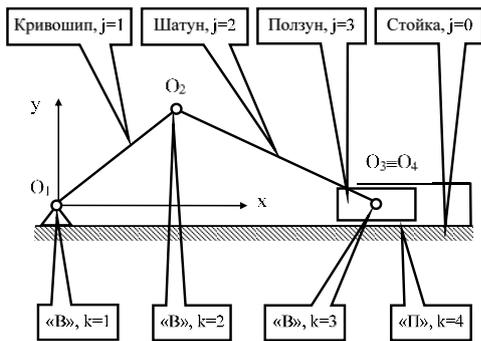


Рис. 1. Структурная схема КПМ

Кроме трех подвижных звеньев, в состав КПМ входит неподвижное звено с номером  $j = 0$  (стойка). Звенья образуют замкнутый контур.

Далее все подвижные соединения звеньев будем называть соединениями, поскольку неподвижных соединений в моделях механизмов нет. Звенья как абсолютно твердые тела могут быть образованы неподвижным соединением других абсолютно твердых тел, но после перехода к модели механизма, в которой звенья уже определены, неподвижных соединений звеньев уже быть не может. В теории механизмов и машин соединение – это кинематическая пара, но поскольку оно характеризуется не кинематическими, а геометрическими характеристиками входящих в него звеньев, то в качестве альтернативного воспользуемся термином «соединение», опуская характеристику «подвижное».

В соответствие с алгоритмом в центре одного из соединений со стойкой, например, в центре шарнира  $O_1$ , следует расположить начало правой инерциальной системы координат  $O_1xuz$  и считать это соединение первым. В направлении от начала координат к соединению ползуна со стойкой следует пронумеровать и звенья,

и соединения [4].

Достаточно посмотреть на структурную схему КПМ, чтобы сформировать его матрицу инцидентности (табл. 1).

Таблица 1. Матрица инцидентности КПМ

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	
Стойка	-1	0	0	1	j = 0
Кривошип	1	-1	0	0	j = 1
Шатун	0	1	-1	0	j = 2
Ползун	0	0	1	-1	j = 3
$H_k$	1	1	1	2	

В каждом столбце матрицы инцидентности находится по две единицы, указывающие на звенья, входящие в это соединение. Эти единицы имеют противоположенные знаки и отражают третий закон Ньютона. Знаки единицам можно расставить произвольно, но лучше знак плюс присвоить единице того звена, для которого на анимационной картине механизма вы планируете изобразить приложенные к нему силы реакции.

Матрица инцидентности подвижных звеньев механизма  $K_{j,k}$  выделена серым цветом. Именно она и одномерный массив вида соединений  $H_k$  будут использованы на этапе силового анализа. Массив  $H_k = [1,1,1,2]$  содержит идентификаторы четырех соединений (вращательное соединение – «1», поступательное – «2»).

**Структурный анализ механизма доктора Живаго.** Проведем аналогичные действия с механизмом, содержащим внутренний замкнутый контур с четырьмя шарнирами ABDE. Исследованием этого механизма классическими способом [5, 6] в свое время занимался доктор технических наук, профессор Э.Я. Живаго. Лаконично ассоциируем этот механизм с его именем.

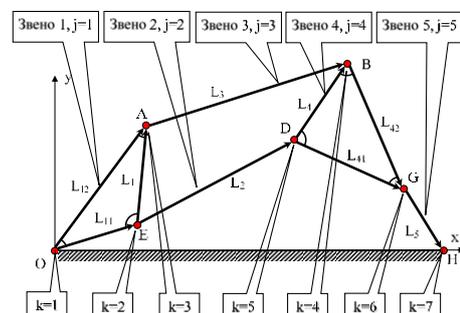


Рис. 2. Структурная схема механизма доктора Живаго

Механизм собран из девяти движущихся в плоскости стержней. Поскольку две тройки стержней образуют два неизменных треугольника OAE и BDG, то подвижных звеньев у этого механизма пять –  $N_s = 5$ .

Звенья соединены между собой и со стойкой семью

шарнирами  $Nr = 7$ . Одномерный массив вида соединений  $H_k$  будут состоять из семи единичек – идентификаторов вращательных соединений.

Совместим начало инерциальной системы координат  $Oxuz$  с центром первого шарнира. Отсюда начнем нумерацию звеньев и соединений. В заключение структурного анализа сформируем матрицу инцидентности (табл. 2). Для наглядности нули в матрице указывать не будем.

**Таблица 2.** Матрица инцидентности механизма доктора Живаго

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7
Стойка, j = 0	-1						-1
Звено 1, j = 1	1	-1	-1				
Звено 2, j = 2		1			-1		
Звено 3, j = 3			1	-1			
Звено 4, j = 4				1	1	1	
Звено 5, j = 5						-1	1
$H_k$	1	1	1	1	1	1	1

Матрица инцидентности подвижных звеньев механизма  $K_{j,k}$  выделена серым цветом.

**Геометрический анализ КПМ.** Геометрический анализ КПМ начинается с оценки числа его степеней свободы. По логике Чебышёва, три свободных подвижных звена КПМ до включения в кинематическую цепь имели 9 степеней свободы. При сборке КПМ его звенья были включены в четыре одноподвижных соединения, каждое из которых накладывает по две связи на входящие в него звенья. Таким образом, после сборки из 9 степеней свободы 8 были ограничены связями, значит, у механизма осталась всего одна степень свободы. Эта логика верна, если связи не дублируют друг друга в любом положении механизма. Для установления этого факта необходимо сформировать уравнения связей для каждого соединения и получить матрицу Якоби.

Будем считать характерной точкой кривошипа центр его первого шарнира  $O_1$ , характерной точкой шатуна центр второго шарнира  $O_2$ , характерной точкой ползуна центр третьего шарнира  $O_3$ . Известно, что центры шарниров – две совпадающие точки, принадлежащие обоим подвижным звеньям, образующим соединение. Это позволяет ввести характерный вектор кривошипа  $\vec{L}_1 = O_1O_2$ , связав его с принадлежащими кривошипу точками. Аналогично введем характерный вектор шатуна  $\vec{L}_2 = O_2O_3$ . Ползуну пока принадлежит только одна точка  $O_3$ . Проведем из этой точки вектор  $\vec{L}_3$  в направлении от этой точки параллельно оси координат и направляющим ползуна. Угловые координаты введенных трех характерных векторов будем считать угловыми координатами подвижных звеньев кривошипно-ползунного механизма.

После выбора характерных точек и характерных векторов каждого звена сконструируем матрицу функций положения звеньев  $s_{i,j}^*$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{1, Ns}$  [7, 8].

В первую строку матрицы  $s_{i,j}^*$  поместим проекции характерных точек звеньев на ось  $Ox$  –  $s_{1,j}^*$ . Во вторую – проекции характерных точек звеньев на ось  $Oy$  –  $s_{2,j}^*$ . В третью – угловые координаты характерных векторов звеньев –  $s_{3,j}^*$ .

Сформируем одномерный массив  $\sigma_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, 3 \cdot Ns}$  из всех обобщенных координат подвижных звеньев, который представляет собой векторизованную по столбцам матрицу  $s_{i,(j)}^* \rightarrow \sigma_\mu$ .

**Уравнения связей.** Уравнения связи для первого шарнира, в который входит стойка и кривошип, следует записать с использованием обобщенных координат входящих в него подвижных звеньев

$$s_{1,1}^* = 0, \quad s_{2,1}^* = 0 \quad (1)$$

Уравнения связи для второго шарнира, в который входят кривошип и шатун, следует записать и с использованием обобщенных координат первого и второго звеньев

$$s_{1,2}^* - s_{1,1}^* - L_1 \cdot \cos(s_{3,1}^*) = 0, \quad s_{2,2}^* - s_{2,1}^* - L_1 \cdot \sin(s_{3,1}^*) = 0 \quad (2)$$

Уравнения связи для третьего шарнира, в который входят шатун и ползун, следует записать с использованием обобщенных координат второго и третьего звеньев

$$s_{1,3}^* - s_{1,2}^* - L_2 \cdot \cos(s_{3,2}^*) = 0, \quad s_{2,3}^* - s_{2,2}^* - L_2 \cdot \sin(s_{3,2}^*) = 0 \quad (3)$$

Напоследок ползун следует включить в четвертое поступательное соединение вместе со стойкой. Понимая конструктивную реализацию поступательного соединения, воспользуемся ранее сделанной рекомендацией и совместим его центр с центром третьего шарнира  $O_3 \equiv O_4$ . После чего уравнения двух связей, накладываемые этим соединением, можно записать с использованием обобщенных координат единственного входящего в него подвижного звена – ползуна

$$s_{2,3}^* = 0, \quad s_{3,3}^* = 0. \quad (4)$$

Уравнения связей, накладываемые каждым соединением, необходимые для анализа их независимости, должны содержать обобщенные координаты включенных в это соединение подвижных звеньев. Если одно из звеньев соединения неподвижное, то в уравнения этого соединения будут входить координаты единственного подвижного звена.

**Матрица Якоби.** Логика Чебышёва позволяет дать оценку снизу числа степеней свободы механизма. Она будет и оценкой сверху, если подвижные соединения не накладывают дублирующих ограничений [4, 5]. Для установления этого факта нужно из уравнений связей (1–4) сформировать одномерный массив  $U_u(\sigma_\mu)$ ,

$u = \overline{1, Nu}$ ,  $Nu = 8$ . После этого нужно продифференцировать массив из восьми уравнений связей  $U_u$  по массиву из девяти обобщенных координат звеньев  $\sigma_\mu$ . Представление в матричной форме этой линейной системы уравнений относительно вариаций обобщенных координат  $\delta\sigma_\mu$  приводит к матрице частных производных (прямоугольной матрице Якоби)  $J_u^\mu = \frac{\partial U_u}{\partial \sigma_\mu}$ .

Если ранг прямоугольной матрицы Якоби  $\text{Rank}(J_u^\mu) = Nu$  равен числу уравнений связи, то уравнения независимые, и постоянно дублирующих связей нет. В таком случае оценка числа степеней свободы механической системы по логике Чебышёва верна.

Ранг матрицы  $J_u^\mu$  КПМ действительно равен восьми, значит, все уравнения связей независимые. После этого введем  $Nq = 3 \cdot Ns - Nu = 1$  одну обобщенную координату – угловую координату кривошипа  $s_{3,1}$ .

Далее из одномерного массива обобщенных координат звеньев  $\sigma_\mu$  исключим обобщенную координату  $s_{3,1}$ , в результате протяженность массива  $\sigma_{\mu\Box}$  станет равной восьми. Теперь следует сформировать квадратную матрицу Якоби  $J_v^{\mu\Box} = \frac{\partial U_u}{\partial \sigma_{\mu\Box}}$ ,  $u = \overline{1, 8}$ ,  $\mu\Box = \overline{1, 8}$  и вычислить ее определитель

$$\det(J_v^{\mu\Box}) = L_2 \cdot \cos(s_{3,2}).$$

Судя по этому выражению, матрица может стать сингулярной, если угловая координата шатуна

$$s_{3,2}^{\text{extr}} = 90^\circ \pm 180^\circ. \quad (5)$$

У КПМ такое может быть только при  $L_2 = L_1$ . Рассмотрим эту ситуацию в критической конфигурации  $s_{3,2}^{\text{extr}}$ , когда длина шатуна незначительно больше длины кривошипа

$$(L_2 - L_1) / (L_2 + L_1) \ll 1. \quad (6)$$

Предположим, обобщенная координата КПМ меняется с постоянной скоростью и определим ускорение ползуна в критической конфигурации  $a_{1,3}^{\text{extr}}$ . При (5) его значение и значения сил инерции, естественно, будут очень большими. Отметим, что нормированное значение ускорения ползуна  $\frac{a_{1,3}^{\text{extr}}}{L_1}$  и обратное нормированное значение определителя для КПМ в этой конфигурации равны между собой

$$\frac{a_{1,3}^{\text{extr}}}{L_1} = \frac{L_1}{\det(J_v^{\mu\Box})}.$$

Таким образом, значение определителя плохо обу-

словленной квадратной матрицы Якоби в критической конфигурации механизма можно использовать для оценки и прогнозирования (но не для определения) степени сбалансированности исследуемого механизма.

Степенью сбалансированности механизма называется отношение минимального значения инерционного коэффициента одноподвижного механизма к максимальному.

**Правило смежных треугольников.** На расчетной геометрической схеме КПМ (рис. 3) следует найти такой треугольник, у которого известны три параметра, и в их состав входит обобщенная координата  $q$ . Этот треугольник называется начальным, по трем его известным параметрам можно восстановить остальные три.

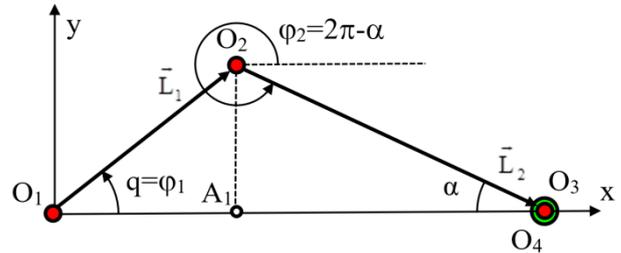


Рис. 3. Геометрическая схема КПМ с двумя смежными треугольниками

Если в качестве обобщенной координаты выбрать угловую координату кривошипа  $q$  и задать ее значение, то в начальном треугольнике  $\Delta O_1 O_2 A_1$  станут известными три параметра: сторона  $O_1 O_2 = L_1$  и два угла  $\angle O_1 A_1 O_2 = 90^\circ$ ,  $\angle O_2 O_1 A_1 = q$ . Значит и остальные три параметра в функциях положения могут быть определены как функции обобщенной координаты  $q$ . Для рассматриваемого механизма представляет интерес только сторона  $O_2 A_1 = L_1 \cdot \sin(q)$

Далее следует перейти к треугольнику  $\Delta O_2 O_3 A_1$ , смежному по отношению к начальному. В  $\Delta O_2 O_3 A_1$  известна сторона  $O_2 O_3 = L_2$ , из начального треугольника известна сторона  $O_2 A_1$  и прямой угол  $\angle O_2 A_1 O_3 = 90^\circ$ . Значит, могут быть определены остальные три параметра. Представляет интерес выражение для стороны этого треугольника  $O_2 A_1$ , из которого следует выразить угол  $\alpha$ ,

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{L_2}{L_1} \cdot \sin(q)\right).$$

**Функции положения.** Зная углы наклона характерных векторов звеньев и длины всех сторон рассмотренных выше треугольников, как функции обобщенных координат  $q$ , следует записать выражения для координат центров всех соединений и угловые координаты всех векторов  $\vec{L}_j$ .

После этого, по аналогии с матрицей  $s_{i,j}^*$ , следует

сформировать матрицу функций положения соединений  $r_{i,k}$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,  $k = \overline{1, Nr}$ . В первой и второй строках расположим проекции центров всех четырех соединений на оси декартовой системы координат  $Oxy$ , помня, что центр четвертого и третьего соединений совпадают. Аргументом этих функций является обобщенная координата механизма  $q$ .

Угловая координата вращательного соединения неизвестна на этапе геометрического анализа. Этот элемент одномерного массива просто не будет задан и нигде не будет использован. Угловая координата идеального поступательного соединения известна – это угловая координата направляющей (перпендикуляр к линии действия главного вектора сил реакции этого идеального соединения).

Далее по такому же принципу следует сформировать матрицу функций положения подвижных звеньев  $s_{i,j}$ . Поскольку прежние функции положения  $s_{i,j}^*$  были нужны только для уточнения числа степеней свободы механической системы, то для новых функций положения используем тот же символ  $s$ .

Разница в прежних функциях положения  $s_{i,j}^*$  и настоящих  $s_{i,j}$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{1, Ns}$  заключается в том, что в качестве характерной точки каждого подвижного звена сейчас нужно выбрать его центр масс. Предположим, что кривошип и шатун – это однородные стержни, центр масс которых находится посередине.

Кроме двух основных матриц функций положения  $s_{i,j}$  и  $r_{i,k}$  необходимо сконструировать их разность  $\rho_{i,j,k} = r_{i,k} - s_{i,j}$ . Индекс  $j = \overline{1, Ns}$  соответствует номеру подвижного звена, индекс  $k = \overline{1, Nr}$  – номеру соединения. В ячейках трехмерного массива  $\rho_{i,j,k}$  будут находиться разности декартовых координат центра  $k$ -го соединения и центра масс  $j$ -го звена. Индекс  $i$  ограничим  $i = \overline{1, 2}$ .

Формирование матриц функций положения  $r_{i,k}$ ,  $s_{i,j}$  и  $\rho_{i,j,k}$  является целью геометрического анализа любого механизма.

**Геометрический анализ механизма доктора Живаго.** Используя логику Чебышёва, получим оценку снизу числа степеней свободы механизма из пяти подвижных звеньев и семи одноподвижных соединений. Такой механизм, скорее всего, имеет одну степень свободы.

Геометрический анализ механизма начинается с его геометрической схемы (рис. 4).

Успех использования аналитических методов зависит от выбора начального треугольника и обобщенной координаты в нем. Если подойти традиционно и принять в качестве обобщенной координаты угловую координату звена, связанного со стойкой ( $\varphi_{11}$  или  $\varepsilon_1$ ), то сформировать выражения для угловых координат остальных звеньев в явном виде не удастся – придется сводить геометрический анализ к решению трансцендентного уравнения.

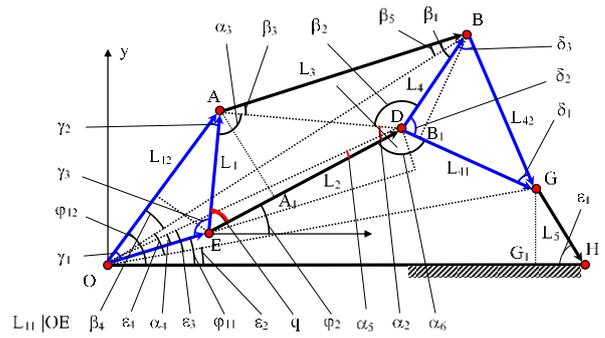


Рис. 4. Геометрическая схема КПМ со смежными треугольниками

Чтобы обойти в геометрическом анализе использование численных методов и выразить угловые координаты всех звеньев в явном виде, предлагается в качестве начального взять во внутреннем замкнутом контуре  $ABDE$  треугольник  $\triangle ADE$ , а в качестве обобщенной координаты механизма назначить  $q = \angle AED$ . Ниже приведен алгоритм геометрического анализа механизма при таком выборе начального треугольника.

**Треугольник № 1.** В начальном треугольнике по теореме косинусов определим  $AD(q)$ . Для определения угла  $\alpha_2$  используем уравнение

$$\tan(\alpha_2) = \frac{L_1 \cdot \sin(q)}{L_2 - L_1 \cdot \cos(q)}.$$

Угол  $\alpha_3$  определим из суммы углов этого треугольника.

**Треугольник № 2  $\triangle ABD$ .** По теореме косинусов определим угол  $\beta_1$ . Для определения угла  $\beta_2$  используем уравнение  $\tan(\beta_2) = \frac{L_3 \cdot \sin(\beta_1)}{L_4 - L_3 \cdot \cos(\beta_1)}$ .

Угол  $\beta_3$  определим из суммы углов этого треугольника.

**Треугольник № 3  $\triangle ODE$ .** По теореме косинусов для угла  $q + \gamma_3$  определим размер  $OD(q)$ . Для определения угла  $\alpha_4$  используем уравнение

$$\tan(\alpha_4) = \frac{L_2 \cdot \sin(\pi - q - \gamma_3)}{L_{11} - L_2 \cdot \cos(\pi - q - \gamma_3)}.$$

Угол  $\alpha_5$  определим из суммы углов этого треугольника. Сформируем выражение и для угла

$$\alpha_6 = 2 \cdot \pi - \delta_2 - \beta_2 - \alpha_2 + \alpha_5.$$

**Треугольник № 4  $\triangle OAB$ .** По теореме косинусов для угла  $\beta_1 + \delta_3 - \beta_3$  определим размер  $OB(q)$ . Для определения угла  $\beta_4$  используем уравнение

$$\tan(\beta_4) = \frac{L_3 \cdot \sin(\pi - \gamma_2 - \alpha_3 - \beta_3)}{L_{12} + L_3 \cdot \cos(\pi - \gamma_2 - \alpha_3 - \beta_3)}.$$

Угол  $\beta_5$  определим из суммы углов этого треугольника.

**Треугольник № 5**  $\triangle ODG$ . По теореме косинусов для угла  $\beta_1 + \delta_3 - \beta_5$  определим размер  $OG(q)$ . Для определения угла  $\varepsilon_3$  используем теорему косинусов, записанную для этого угла.

**Треугольник № 6**  $\triangle OBG$ . По теореме косинусов для угла  $\alpha_6$  еще раз определим размер  $OG(q)$ . Это уравнение можно использовать для проверки.

Для определения угла  $\varepsilon_4$  используем теорему косинусов, записанную для этого угла.

**Треугольник № 7**  $\triangle OGH$ . По теореме косинусов определим угол  $\varepsilon_1$ . Для определения угла  $\varepsilon_2$  используем уравнение  $\tan(\varepsilon_2) = \frac{L_5 \cdot \sin(\varepsilon_1)}{L_0 - L_5 \cdot \cos(\varepsilon_1)}$ .

$$\tan(\varepsilon_2) = \frac{L_5 \cdot \sin(\varepsilon_1)}{L_0 - L_5 \cdot \cos(\varepsilon_1)}.$$

После рассмотрения семи треугольников запишем уравнения для угловых координат всех стержней

$$\varphi_{11} = \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \beta_4 - \gamma_1, \quad \varphi_{11} = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \alpha_4. \quad (7)$$

Применение первого или второго уравнений для  $\varphi_{11}$  может быть полезно при различных размерах звеньев и в разных конфигурациях механизма, поскольку не требует переключения с одной ветви решения на другую

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= \varphi_{11} + \gamma_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_{11} + \pi - \gamma_3 - q \\ \varphi_3 &= \varphi_{12} - (\pi - \gamma_2 - \alpha_3 - \beta_3) \\ \varphi_{42} &= \varphi_3 - (\pi - \beta_1 - \delta_3) \\ \varphi_{41} &= \varphi_{42} + \delta_1 \\ \varphi_5 &= 2 \cdot \pi - \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Сформируем выражения для координат центров всех семи соединений:

$$\begin{aligned} x_O &= 0, \quad y_O = 0. \\ x_A &= L_{12} \cdot \cos(\varphi_{12}), \quad y_A = L_{12} \cdot \sin(\varphi_{12}). \\ x_B &= x_A + L_3 \cdot \cos(\varphi_3), \quad y_B = y_A + L_3 \cdot \sin(\varphi_3). \\ x_E &= L_{11} \cdot \cos(\varphi_{11}), \quad y_E = L_{11} \cdot \sin(\varphi_{11}). \\ x_D &= x_E + L_2 \cdot \cos(\varphi_2), \quad y_D = y_E + L_2 \cdot \sin(\varphi_2). \\ x_G &= x_B + L_{42} \cdot \cos(\varphi_{42}), \quad y_G = y_B + L_{42} \cdot \sin(\varphi_{42}). \\ x_H &= L_0, \quad y_H = 0. \end{aligned}$$

Для контроля гладкости функций положения используем следующие четыре уравнения:

$$\begin{aligned} x_G &= x_D + L_{41} \cdot \cos(\varphi_{41}), \quad y_G = y_D + L_{41} \cdot \sin(\varphi_{41}), \\ x_G + L_5 \cdot \cos(\varphi_5) &= L_0, \quad y_G + L_5 \cdot \sin(\varphi_5) = 0. \end{aligned}$$

**Практические рекомендации к формированию функций положения.** Формирование функций положения следует начинать с расчетной схемы механизма, выполненной в масштабе. Необходимо измерить обобщенную координату механизма, все характерные углы, расстояния, координаты точек, для которых впоследствии будут формироваться функции положения.

После формирования очередной функции положения необходимо определить ее численное значение при заданной обобщенной координате. Естественно, вычисленное значение должно совпадать с измеренным.

Следующим шагом проверки является анимация характерных точек механизма, которая выполняется по сформированным выражениям. Анимация предполагает задание диапазона изменения обобщенной координаты, который желательнее начать со значения обобщенной координаты, которым характеризуется расчетная схема. Наблюдая анимацию характерных точек, следует контролировать неизменность длин звеньев. Невыполнение этого условия возможно, если переход функции некоторого угла на вторую ветвь своевременно не сделан.

Анимация механизма позволяет наглядно продемонстрировать область определения аргумента (обобщенной координаты механизма), для которого существуют гладкие функции положения. Если рассмотреть внутренний замкнутый контур  $ABDE$  (см. рис. 1), то можно заметить, что область определения обобщенной координаты  $q$  не при любых длинах его звеньев является полным оборотом. В таких случаях при подходе к краю области определения становится видимым, как два звена вытягиваются в линию и не позволяют третьему продолжать изменять свою угловую координату.

**О гладкости функций положения и ветвях решения уравнений.** Прежде чем пояснить переход функции положения с одной ветви на другую, остановимся на понятии «гладкости» функций [5, 6]. Гладкой будем считать функцию, которая, как минимум, дважды дифференцируема.

Предположить факт «гладкости» функций положения механизма можно экспериментально. Если, глядя на модель механизма, мы видим, что длины звеньев не меняются, а все характерные точки и характерные углы звеньев получают конечное приращение при постоянном приращении обобщенной координаты, то функции положения, скорее всего, «гладкие». Но нарушение этого правила можно не заметить, глядя на анимационную картину. Окончательно факт «гладкости» функций положения можно установить только из анализа графиков аналогов скоростей и аналогов ускорений звеньев и соединений.

В некоторых случаях «негладкость» функций положения может быть следствием некорректности их определения. Приведем пример определения угла  $\varepsilon_3$  при помощи теоремы косинусов  $\cos(\varphi) = f(q)$ . Стоит напомнить, как минимум, о двух решениях этого уравнения:

$$\varepsilon_{31} = \arccos(f(q)), \quad \varepsilon_{32} = -\arccos(f(q)).$$

При определенном соотношении длин стержней возникает следующая ситуация (рис. 5).

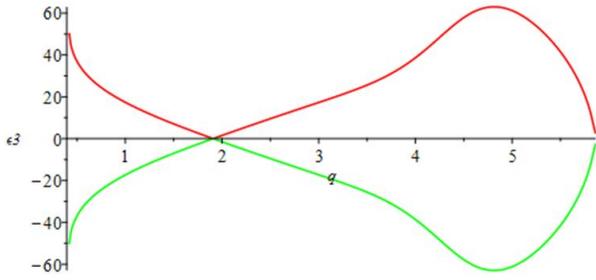


Рис. 5. Верхняя ветвь решения –  $\varepsilon_{31}$ , нижняя ветвь решения –  $\varepsilon_{32}$

Для того, чтобы угловая координата  $\varepsilon_3$  была «гладкой» функцией при  $q^* = 1.907$ , следует перейти с одной ветви на другую. Какая из этих функций должна быть при  $q < q^*$ , следует установить из начальных условий движения механизма. Для рассмотренного выше механизма

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} \varepsilon_{31}, & \text{если } q \leq q_1 \\ \varepsilon_{32}, & \text{если } q > q_1 \end{cases}$$

Приведем график функции (рис. 6) аналога скорости  $\zeta = \frac{d\varepsilon_3}{dq}$ . Как видим, кривая является «гладкой».

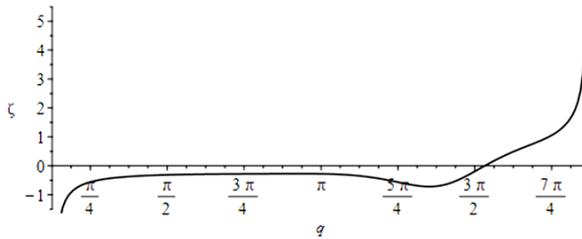


Рис. 6. «Гладкая» кривая аналога скорости  $\zeta$

Переход с одной ветви решения на другую, обеспечивающий «гладкость» функции, возможен только при пересечении графиков, приведенных на рис. 5.

С целью ухода от различных ветвей решения и перекрытия между ними в определении углов треугольника в математических пакетах используется функция арктангенса с двумя аргументами  $\arctan(f_1, f_2)$ . Здесь функции  $f_1$  и  $f_2$  пропорциональны синусу и косинусу искомого угла. В этом случае областью определения функции  $\arctan(f_1, f_2)$  является угол в диапазоне  $0 \dots 2\pi$ . Собственно, эта рекомендация и была использована почти на каждом шаге приведенного выше алгоритма.

К сожалению, тригонометрические уравнения не позволяют определить углы треугольника функциями с областью определения  $0 \dots 2\pi$ . Если известны все стороны треугольника, то найти один из углов невозможно без использования функций арксинуса или арккосинуса. В этой связи остается только контролировать гладкость формируемых функций. Если функция

аналога скорости или ускорения терпит разрыв, то следует сделать переход с одной ветви функции на другую.

Переход с одной ветви решения на другую требует определения момента перехода  $q^*$ . Установление этой величины в большинстве случаев возможно только численными методами. Использование альтернативных функций  $\varphi_{11}$  (7) может упростить ситуацию, поскольку области их определения могут перекрывать друг друга, и переход между ними можно задать в любом месте, где они обе корректно определяют угол  $\varphi_{11}$ .

Геометрический анализ механизма заканчивается формированием матриц функций положения  $r_{i,k}$ ,  $s_{i,j}$  и  $\rho_{i,j,k}$ .

**Кинематический анализ механизмов.** Кинематический анализ обоих механизмов представляет собой формальную процедуру для математических пакетов с символьными вычислениями – процедуру дифференцирования функций положения звеньев  $s_{i,j}$  по времени [1].

$$v_{i,j} = \dot{s}_{i,j} = \zeta_{i,j} \cdot \dot{q}, \quad \zeta_{i,j} = \frac{ds_{i,j}(q)}{dq},$$

$$a_{i,j} = \dot{v}_{i,j} = \zeta_{i,j} \cdot \ddot{q} + \xi_{i,j} \cdot \dot{q}^2, \quad \xi_{i,j} = \frac{d\zeta_{i,j}(q)}{dq}.$$

**Динамический и силовой анализ КПМ.**

Динамический анализ выполняется по описанному в [1] алгоритму. Вариации алгоритма зависят от сложности выражений элементов матрицы функций положения  $s_{i,j}$ . У КПМ функции положения можно считать простыми, они позволяют получить аналитические выражения для всех вычисляемых в алгоритме характеристик.

Начинается динамический анализ с формирования матрицы инерционных характеристик звеньев механизма  $I^{i,j}$ . Две верхних одинаковых строки матрицы  $I^{i,j}$  заполняют массы звеньев. Третья строка – главные центральные моменты инерции звеньев.

Затем по приведенным в [1, 2] выражениям вычисляются инерционные коэффициенты механизма первого  $V(q)$  и второго порядка  $W(q)$ .

Отношение минимального значения инерционного коэффициента механизма первого порядка к максимальному показывает степень сбалансированности механизма  $k_{\text{balans}} = 0.3$ . Если эти значения одинаковы, то при нулевой обобщенной силе, механизм по инерции будет двигаться с постоянной обобщенной скоростью.

Следующим шагом является вычисление обобщенной силы  $Q$  и формирование дифференциального уравнения движения

$$V(q) \cdot \ddot{q} + W(q) \cdot \dot{q}^2 = Q, \quad (8)$$

$$V(q) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{N_s} I^{i,j} \cdot \zeta(q)_{i,j} \cdot \zeta(q)_{i,j}, \quad W(q) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{N_s} I^{i,j} \cdot \zeta(q)_{i,j} \cdot \xi(q)_{i,j}.$$

Обычно на этом шаге ставится задача обеспечить механизму то или иное движение. Это может быть движение с заданным средним за цикл ускорением или замедлением.

Если в выражении для обобщенной силы присутствует одна неизвестная величина, обычно движущая сила или сила полезного сопротивления, то из условия сохранения кинетической энергии при установившемся движении (или при заданном за цикл изменении кинетической энергии в режиме разгона или торможения) можно определить эту величину.

Данная задача наиболее простым способом решается, если активные силы постоянные или позиционные. В этом случае можно записать (9) – выражение для первого интеграла дифференциального уравнения движения (8). Затем подставить (9) в (8) и получить (11)

$$\dot{q}(q)^2 = \frac{2 \cdot A(q) + V(q_{beg}) \cdot \dot{q}_{beg}^2}{V(q)}, \quad (9)$$

$$A(q) = \int_{q_{beg}}^q Q(z) \cdot dz, \quad (10)$$

$$\ddot{q}(q) = \frac{Q(q)}{V(q)} - \frac{W(q)}{V(q)^2} \cdot (2 \cdot A(q) + V(q_{beg}) \cdot \dot{q}_{beg}^2) \quad (11)$$

В установившемся режиме работы механизма кинетическая энергия его звеньев в начале и конце рабочего цикла одинакова, значит определенный интеграл (10) за цикл равен нулю. В фазе разгона задается величина циклового изменения кинетической энергии. В таком случае также известно значение определенного интеграла (10). Из этого уравнения можно определить силу, которая обеспечивает заданное движение [9].

Рассмотрим КПМ (см. рис. 1), движущийся в горизонтальной плоскости. На него кроме сил тяжести действует неизвестная по величине кусочно-постоянная движущая сила  $P(q)$  (рис. 7), приложенная к ползуну, и известная постоянная пара сил  $M = 10$  полезного сопротивления, приведенная к кривошипцу.

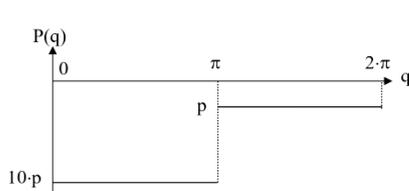


Рис. 7. Кусочно-постоянная движущая сила  $P(q)$

Пусть длина шатуна в два раза больше длины кривошипа  $kL = L_2 / L_1 = 2$ . Массы звеньев пропорциональны их длинам, масса ползуна в 2 раза меньше массы шатуна. Необходимо вычислить неизвестный коэффициент  $p$ , определяющий движущую силу  $P(q)$ , которая обеспечит движение механизма с постоянной средней цикловой скоростью  $\dot{q}_{mid}$ . Рассматриваемый установившийся режим работы механизма или режим разгона (торможения) так же, как и приведенные численные значения, не меняют сам алгоритм расчета неизвестного коэффициента в рассмотренном примере  $p = 10 \cdot \pi / 9$ .

После того, как все силы определены, сформируем матрицу активного силового воздействия на подвижные звенья механизма

$$F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P(q) \\ -m_1 \cdot g & -m_2 \cdot g & -m_3 \cdot g \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выражение для обобщенной силы [1, 2] представляет собой свертку произведения двух матриц

$$Q(q) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{N_s} F(q)^{i,j} \cdot \zeta(q)_{i,j}.$$

Матрица аналогов скоростей  $\zeta(q)_{i,j} = \frac{ds(q)_{i,j}}{dq}$  получена в кинематическом анализе.

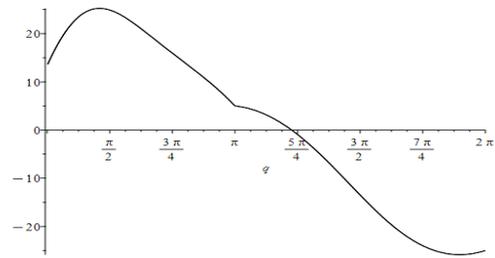


Рис. 8. Обобщенная сила как функция обобщенной координаты

В установившемся режиме площадь под кривой и над кривой одинаковы. В переходных режимах одна из площадей больше другой на величину интенсивности переходного режима [10].

Имея выражение  $Q(q)$ , для рассмотренного примера можно взять интеграл с переменным верхним пределом (10) и определить в аналитической форме зависимости обобщенной скорости и обобщенного ускорения от обобщенной координаты (9) и (8). Приведем графики этих величин (рис 9).

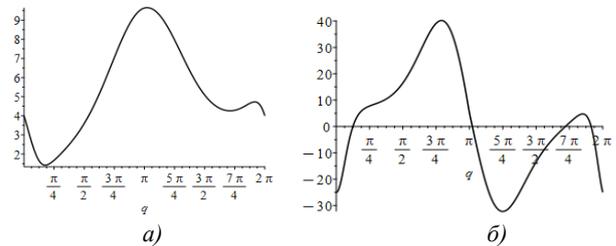


Рис. 9. Графики зависимостей обобщенной скорости (а) и обобщенного ускорения (б) от обобщенной координаты  $q$

При известных  $\dot{q}(q)$  и  $\ddot{q}(q)$  следует получить матрицу обобщенных ускорений подвижных звеньев механизма  $a(q, \dot{q}, \ddot{q})_{i,j} = \zeta(q)_{i,j} \cdot \ddot{q} + \xi(q)_{i,j} \cdot \dot{q}^2$  и матрицу сил инерции  $\Phi^{i,j} = \Gamma^{i,j} \cdot a_{i,j}$ . После чего объединить мат-

рицы  $S^{i,j} = F^{i,j} + \Phi^{i,j}$  и векторизовать результат по строкам  $S^{i,(j)} \rightarrow \beta^0$ . Одномерный массив  $\beta^0$  будет использован в силовом анализе механизма.

Целью силового анализа является расчет составляющих главного вектора и главного момента сил реакции каждой кинематической пары [11]. Выражение для расчета этих составляющих  $\alpha^\sigma$  приведено в [1, 3]

$$\alpha^\sigma = C^{u,\sigma} \cdot \beta_u, \quad \text{где } C^{u,\sigma} = -(A_{u,\sigma})^{-1} \quad (12)$$

С помощью (12) в рассмотренном примере получены аналитические выражения для сил реакции КПП (рис. 10–12).

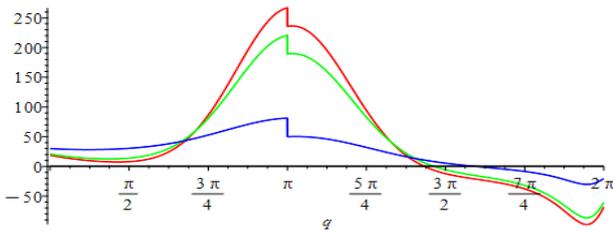


Рис. 10. Горизонтальные составляющие главных векторов сил реакции четырех соединений КПП

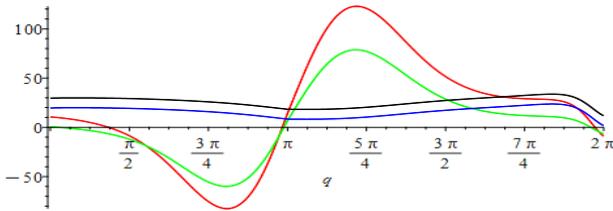


Рис. 11. Вертикальные составляющие главных векторов сил реакции четырех соединений КПП

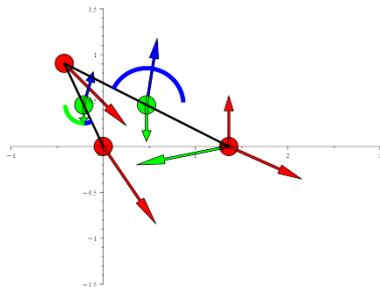


Рис. 12. Один из кадров анимационной картины, на которой видно движение звеньев КПП, все силы и пары сил, действующие на звенья

**Особенности динамического и силового анализа механизма доктора Живаго.** Отличительной особенностью этого механизма является сложность его функций положения [12, 13]. Сложность можно оценить количеством треугольников, использованных для покрытия расчетной геометрической схемы механизма. Для КПП было достаточно двух, причем прямоугольных, треугольников, для рассматриваемого механизма понадобилось использовать семь, причем не прямоугольных. Можно показать, что сложность функций

положения, получающихся при рассмотрении одного произвольного треугольника равна сложности функций положения при рассмотрении двух прямоугольных треугольников. Таким образом, сложность функций положения механизма доктора Живаго в семь раз превышает сложность функций положения КПП.

Сложность функций положения не требует существенных затрат процессорного времени на первых трех этапах алгоритма. Первым пунктом, где алгоритм приходится корректировать, является вычисление в динамическом анализе интеграла (10). В аналитической форме вычислить интеграл удастся только в самых простых случаях, но численно, с заранее заданной точностью, для позиционных сил его можно применить всегда.

Если обобщенная сила является периодической функцией, то рациональным решением является разбиение области определения обобщенной координаты на  $2^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  равных отрезков и вычисление определенного интеграла в этих точках. Затем с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) необходимо аппроксимировать дискретную функцию  $Q(q_{\text{kadr}})$ ,  $\text{kadr} = 1, 2^n$  рядом  $Q^\Phi(q)$ . После этого можно продолжать аналитические преобразования характеристических матриц.

В редких случаях и в основном на этапе отладки программы к БПФ приходится прибегать при получении выражений  $\dot{q}(q)$  и  $\ddot{q}(q)$ .

Следующим возможным местом существенных затрат процессорного времени является обращение матрицы  $(A_{u,\sigma})^{-1}$ . С этого шага алгоритма приходится отказываться от аналитичности представления выражений и переходить к численным значениям характеристических матриц на каждом кадре анимационной картины. В алгоритме создаются массивы размерностью на единицу большей. Вместо матрицы  $A_{u,\sigma}$  создается объемная матрица  $A_{\text{kadr},u,\sigma}$ . В слоях объемной матрицы  $A_{\text{kadr}}$  хранятся численные значения матрицы  $A_{u,\sigma}$  на каждом кадре будущей анимационной картины. Затем в каждом слое выполняется обращение этой матрицы. Обращенная матрица  $C^{u,\sigma} = -(A_{u,\sigma})^{-1}$  помещается в слой результирующей объемной матрицы  $C^{\text{kadr},u,\sigma}$ . Слои матрицы  $C^{\text{kadr}}$  будут использованы при расчете сил реакции соединений.

Аналогичные действия нужно сделать с матрицей  $F^{i,j}$ , которая для каждого кадра анимации будет иметь вид  $F^{\text{kadr},i,j}$ . По этому же правилу на единицу увеличивается размерность массивов:  $\Phi^{\text{kadr},i,j}$ ,  $S^{\text{kadr},i,j}$ ,  $\beta^{\text{kadr},j}$ ,  $\alpha^{\text{kadr},j}$ .

Алгоритм дальнейшего преобразования объемных матриц с числовым наполнением остается прежним. При этом точность конечных выражений будет определяться вычислением определенного интеграла и аппроксимацией дискретных функций рядами Фурье. Точность аппроксимации рядами Фурье зависит от числа отрезков  $2^n$  и точности вычислений коэффициентов ряда.

Завершающим шагом анализа механизма является его анимация с выводом необходимых для анализа векторов сил, скоростей, ускорений.

Время выполнения анализа достаточно сложного механизма доктора Живаго с численным представлением характеристических матриц на каждом из 36-ти кадров анимации составляет приблизительно полторы минуты на персональном компьютере с процессором Intel Core i7.

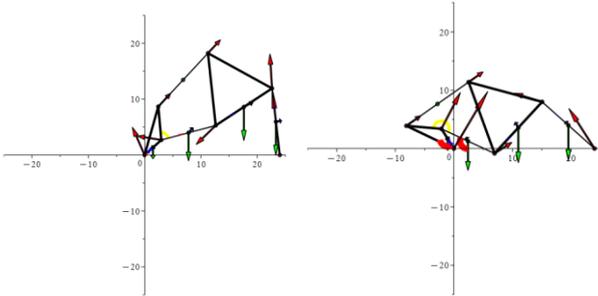


Рис. 13. Два кадра анимации механизма доктора Живаго

**Заключение.** Принципиальной особенностью предлагаемого аналитического метода исследования механизма является наличие проверок формирования пяти характеристических матриц [14].

Первой в алгоритме создается матрица инцидентности. Она должна отвечать проверяемому условию по сумме элементов в столбцах и правильно отражать картину соединений звеньев, что не поддается проверке по формальным признакам.

Проверкой второго этапа (геометрического анализа) является анимация механизма. Во время анимации не должно меняться расстояние между характеристическими точками звеньев (длина звеньев). Для простых механизмов ошибки довольно редки, а вот для сложных многозвенных типа механизма доктора Живаго особенности функций положения, которые трудно предвидеть, практически неизбежны. При одних численных значениях длин звеньев функции безошибочно описывают движение механизма. При изменении длин трудно уследить за переходом решения с одной ветви на другую. Это, в первую очередь, можно контролировать по анимационной картине, но окончательно следует проверять по окончании третьего этапа – кинематического анализа. Проверяется не операция дифференцирования функций положения, а факт их «гладкости» (см. рис. 6), который может нарушаться вследствие некорректности создания функций положения. Элементы матриц аналогов скоростей и аналогов ускорений как функции обобщенной координаты должны быть «гладкими» функциями, если механизм не является механизмом с выстоями.

#### Литературы

1. Панасенко А.Н. Аналитические методы исследования плоских механизмов: в 2 ч. Иркутск : ИрГУПС, 2014.
2. Панасенко А.Н., Панасенко С.А. Анализ плоских однополных механизмов с использованием шести характеристических массивов // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике : сборник тезисов до-

кладов. Санкт-Петербург, 2023. Т. 1. С. 509–511.

Последняя проверка, выполняемая в самом конце алгоритма анализа, заключается в сравнении результатов расчета тех составляющих сил реакции соединений, которые попали в «исключенные» уравнения. Абсолютное совпадение результатов бывает только в том случае, если в алгоритме не используются численные методы, например, вычисление определенного интеграла или аппроксимация дискретной функции.

Как показывает опыт, ошибки при формировании характеристических матриц чаще всего обусловлены невнимательностью при их формировании. Поэтому их поиск заключается в повторном составлении «подозрительных» характеристических матриц, желательно через некоторое время.



Рис. 14. Погрешность вычисления «исключенного» момента сил реакции в первом шарнире механизма доктора Живаго

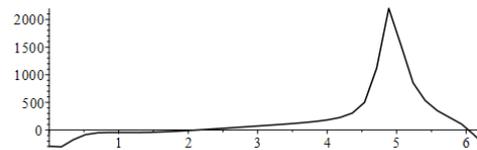


Рис. 15. Численное значение горизонтальной составляющей силы реакции в первом шарнире механизма доктора Живаго

Как видно из двух рассмотренных выше примеров (рис. 14, 15), алгоритм анализа механизма может быть выполнен без использования численных методов. При этом результаты расчета всех величин представлены аналитическими функциями. Но в большинстве случаев интеграл (10) приходится вычислять в квадратурах [15, 16]. С этого места возможны два варианта продолжения алгоритма: либо сразу перейти к матрицам с числовым наполнением, либо аппроксимировать полученный результат рядами для периодических функций или сплайнами для неперiodических. Второй путь целесообразен в случае поиска экстремумов функций, например, при параметрической оптимизации механизма. Первый путь целесообразен, когда нужно получить конечный результат для заданных параметров. Он продемонстрирован в примере механизма доктора Живаго.

3. Панасенко А.Н., Панасенко С.А. Практическое решение обратной задачи динамики для плоских антропоморфных моделей // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике : сборник тезисов докладов. Санкт-Петербург, 2023. Т. 4. С. 98–100.

4. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование. М. : Инфра-М, 2019. 263 с.
5. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. М. : Машиностроение, 1987. 560 с.
6. Машиностроение. Энциклопедия в сорока томах. Т. I-3. Кн. 1. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. М. : Машиностроение, 1994. 534 с.
7. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М. : Наука, 1988. 640 с.
8. Филонов И.П., Анципорович П.П., Акулич В.К. Теория механизмов, машин и манипуляторов. Минск : Дизайн ПРО, 1998. 656 с.
9. Калинин Я.В. О построении оптимальных алгоритмов ускорения и замедления шагающего робота под водой // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике : сборник тезисов докладов. Санкт-Петербург, 2023. Т. 1. С. 498–500.
10. Теория механизмов и механика машин / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др. М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 686 с.
11. Теория механизмов и машин / М.З. Коловский, А.Н. Евграфов, Ю.А. Семенов и др. М. : Академия, 2008. 557 с.
12. Лурье А.И. Аналитическая механика. М. : Физматлит, 1961. 824 с.
13. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. М. : Юрайт, 2016. 592 с.
14. Арнольд В.И. Математические методы классической механики : М. : Наука. 1989. 472 с.
15. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М. : Физматлит, 2005. 264 с.
16. Тимофеев Г.А. Теория механизмов и машин. М. : Юрайт, 2023. 432 с.
3. Panasenکو A.N., Panasenکو S.A. Practical solution of the inverse problem of dynamics for planar anthropomorphic models // XIII All-Russian Congress on Theoretical and Applied Mechanics: collection of abstracts of reports. St. Petersburg, 2023. Vol. 4. Pp. 98–100.
4. Smelyagin A.I. Theory of Mechanisms and Machines. Course Design. Moscow: Infra-M, 2019. 263 p.
5. Kraynev A.F. Dictionary and Handbook of Mechanisms. Moscow: Mechanical Engineering, 1987. 560 p.
6. Mechanical Engineering. Encyclopedia in Forty Volumes. Vol. I-3. Book 1. Dynamics and Strength of Machines. Theory of Mechanisms and Machines. Moscow: Mechanical Engineering, 1994. 534 p.
7. Artobolevsky I.I. Theory of Mechanisms and Machines. Moscow: Nauka, 1988. 640 p.
8. Filonov I.P., Antsiporovich P.P., Akulich V.K. Theory of Mechanisms, Machines, and Manipulators. Minsk: Design PRO, 1998. 656 p.
9. Kalinin Ya.V. On the construction of optimal algorithms for acceleration and deceleration of a walking robot under water // XIII All-Russian Congress on Theoretical and Applied Mechanics: collection of abstracts. St. Petersburg, 2023. Vol. 1. Pp. 498–500.
10. Theory of mechanisms and mechanics of machines / K.V. Frolov, S.A. Popov, A.K. Musatov, et al. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2012. 686 p.
11. Theory of mechanisms and machines / M.Z. Kolovsky, A.N. Evgrafov, Yu.A. Semenov, et al. Moscow: Academy, 2008. 557 p.
12. Lurie A.I. Analytical mechanics. M.: Fizmatlit, 1961. 824 p.
13. Polyakhov N.N., Zegzhda S.A., Yushkov M.P. Theoretical Mechanics. M.: Yurait, 2016. 592 p.
14. Arnold V.I. Mathematical Methods of Classical Mechanics: M.: Nauka. 1989. 472 p.
15. Gantmakher F.R. Lectures on Analytical Mechanics. M.: Fizmatlit, 2005. 264 p.
16. Timofeev G.A. Theory of Mechanisms and Machines. M.: Yurait, 2023. 432 p.

#### *References*

1. Panasenکو A.N. Analytical methods for studying planar mechanisms: in 2 parts. Irkutsk: IrGUPS, 2014.
2. Panasenکو A.N., Panasenکو S.A. Analysis of planar single-motion mechanisms using six characteristic arrays // XIII All-Russian Congress on Theoretical and Applied Mechanics: col-